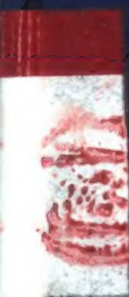
环的同调维数

程福长 易忠 著



广西师范大学出版社

·理科现代科技研究丛书·

环的同调维数

程福长
易　忠　著

广西师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

环的同调维数/程福长,易忠著.—桂林:广西师范大学出版社,2000.10

(理科现代科技研究丛书)

ISBN 7-5633-2909-9

Ⅰ.环… Ⅱ.①程… ②易… Ⅲ.环-同调维数

Ⅳ.0153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42029 号

广西师范大学出版社出版发行

(桂林市中华路 36 号　邮政编码:541001

电子信箱:pressz@public.glptt.gx.cn)

出版人:萧启明

全国新华书店经销

广西地质印刷厂印刷

(广西南宁市建政东路　邮政编码:530023)

开本:890 mm×1 240 mm　1/32

印张:9.875　字数:284 千字

2000 年 10 月第 1 版　2000 年 10 月第 1 次印刷

印数:0 001~1 000　定价:18.00 元

序　言

环的同调维数是近代环论一个重要研究领域，特别是 80 年代以来，关于凝聚环和非交换 Noether 环的同调维数的理论研究，极大地丰富和发展了环的同调维数的经典结果，它的理论和方法影响到代数学和其他数学学科.

本书在假定读者已经熟悉抽象代数和同调代数基本知识的基础上进一步叙述环的同调维数理论，包括这一领域的许多新的结果. 第一章主要介绍环和模的基本知识. 第二章介绍一般环和模的经典的同调维数，还包括了 Ng 维数. 这两章有些内容仅给出结论以及相关文献，不再详细叙述. 第三章专门介绍 Noether 环（不一定是交换的）的同调维数. 第四章主要把 Noether 环一些经典的著名结果推广到凝聚环，还讨论了凝聚 FP-环和 $(a, 2, b)$ -环的结构性质和分类问题. 第五章讨论了 π-凝聚环和 FGT-维数. 第六章主要把局部环的结果推广到半局部环. 第七章叙述了对偶模的同调特征. 第八章主要刻划群环、斜群环、交叉积和群分次环的同调维数. 第八章是由易忠教授撰写的.

本书可供数学专业的研究生和数学工作者参考，也可作为代数方向二年级研究生的教材.

本书在编写时，收集了有关的文献资料，参考了一些文献的结果，特向这些文献的作者致以诚挚的谢意. 我还要感谢我的导师张禾瑞教授、周伯埙教授、刘绍学教授和王世强教授，是他们引导我学习环论和同调代数. 本书的出版获得广西自然科学基金资助，还得到广西师范大学出版社的赞助和鼎力支持，余鑫晖教授一直关心此书的出版，研究生赵巨涛、黄寄洪和张积成在学习上述讲义的过程中提出了许多有益建议，也在此表示感谢.

由于水平有限，书中一定会有不足之处，敬请读者批评指正.

程福长

1998年2月于广西师范大学

HOMOLOGICAL DIMENSION OF RINGS

Cheng Fuchang
Yi Zhong

ABSTRACT

The theory and application of homological dimension of rings are presented systematically in this book. There are 8 chapters. Its contents are as following: rings and modules, homological dimension, modules and their homological dimension over Noetherian rings, homological dimension of Coherent rings, π-Coherent rings and FGT-dimension, modules and their homological dimension over semi-local rings, homological properties of dual modules, homological dimension of group rings, skew group rings, crossed products and group graded rings.

This is a reference book for mathematicians and research students who have studied Abstract Algebra and have some elementary knowledge about Homological Algebra.

PREFACE

Homological dimension of rings is one of the main research field in ring theory. Since 1980′s the research about non-commutative Noetherian rings and coherent rings largely developed and extended the classical results about homological dimensions of rings. The new results and methods have been applied to other mathematics subjects and other Algebra branches.

In this book we focus on homological dimensions of rings and we suppose that the readers are familiar with Abstract Algebra and have some knowledge about Homological Algebra. Many new results are included in this book. Chapter one is an introduction about rings and modules. Chapter two states many classical results about homological dimensions of rings and modules, and the Ng dimension is also studied. In these two chapters, for many theorems we state the results and omit the proofs, but relevant references are pointed out. Chapter three is specifically for homological dimensions of Noetherian rings. In chapter four we generalize some classical results about Noetherian rings to coherent rings, coherent FP-rings are discussed and the structure and classification of (a, 2, b)-rings are studied too. In chapter five π-coherent rings and FGT-dimension are studied. Chapter six is designed to generalize the results of local rings to semilocal rings. Chapter seven is about the homological character of dual modules. Chapter eight is devoted to the study of homological dimensions of group rings, skew group rings, crossed products and group graded rings. This chapter is written by Professor Yi Zhong.

This book is a reference book for mathematicians and mathematics students. It can also be used as a textbook for research students in their sencond year.

In this book we collected many new results and referred to many books and papers. We are very grateful to the original authors. I would also like to express my gratitude to my supervisors, Professors Zhang Herui、Zhou Boxun、Liu Shaoxue and Wang Shiqiang. It is them who guided me to study ring theory and homological Algebra. I also hope to thank Guangxi Teachers' University Press and Guangxi Natural Science Foundation for their support for the publication of this book. I am also indebted to Professor Yu Xinhui, who has been of great assistance in the prodution of this book, and to Zhao Jutao, Huang Jihong, Zhang Jicheng, who have used parts of the earlier text in a course of a term, and have called my attention to many places where improvements in the exposition could be made.

Finally, please excuse the shortcomings or errors appeared in this book. I would be glad to hear some suggestions and comments.

Cheng Fuchang

Guangxi Teachers University, Guilin

February, 1998.

目　录

CONTENTS

第一章

环和模

在这一章里，我们主要介绍环和模的基本概念，如投射模、内射模、平坦模、凝聚环、半遗传环与遗传环、Von Neumann 正则环、半单环、局部环和半局部环、半完全环和完全环等重要环类. 我们假定读者具有抽象代数和同调代数的基本知识，在此前提下，有些内容仅给出结论以及相关的文献，不再详细证明.

这一章所指的环均是有单位元 1 的结合环，所有的模为酉模. f. g. 表示有限生成，$\mathscr{C}_\Lambda^L$ 和 $\mathscr{C}_\Lambda^R$ 分别表示左 Λ- 模的范畴和右 Λ- 模的范畴 .

1.1 投射模和生成元，内射模和余生成元

投射模和内射模是模论及同调代数中最重要的两个基本概念.

定义 设 Λ 是环，P 是左 Λ- 模，若函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, -)$ 正合，则称 P 为投射模.

定理 1.1.1 设 Λ 是环，P 是左 Λ- 模，则下列陈述是等价的：

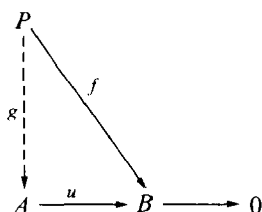
(i) P 是投射模；

(ii) 对 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 内任一如下的图，其中行正合，则存在一个 Λ- 同态 $g: P \to A$，使下图交换，即 $f = ug$；

(iii) 对每个 Λ- 满同态 $u: A \to B$，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,u): \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B)$ 是满的；

(iv) 在 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 内任何短正合列

$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{u} P \longrightarrow 0$ 是分裂正合的；



(v) P 是自由模的直和项;

(vi) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,A)=0,\forall$ 左 Λ- 模 A;

(vii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(P,A)=0,\forall$ 左 Λ- 模 A 和任意整数 $n>0$.

定理 1.1.1 的证明见文献[75].

由定理 1.1.1 得以下的推论.

推论 1.1.2 一个左 Λ- 模 P 是 f.g. 投射模当且仅当 $P\oplus P'\cong\Lambda^{(n)}$,这里 n 是一个正整数,P' 是一个左 Λ- 模.

投射模具有以下性质:

左 Λ- 模 $A=\bigoplus_{i\in I}A_i$ 是投射模当且仅当每个 A_i 是投射模. 每个左 Λ- 模必是投射模的同态象.

引理 1.1.3 (Schanuel) 设左 Λ- 模序列

$$0\longrightarrow A_1\xrightarrow{f_1}P_1\xrightarrow{g_1}B\longrightarrow 0 \text{ 和 } 0\longrightarrow A_2\xrightarrow{f_2}P_2\xrightarrow{g_2}B\longrightarrow 0$$

正合,这里 P_1,P_2 是投射模,则 $A_1\oplus P_2\cong A_2\oplus P_1$.

证明 考虑下图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 & \xrightarrow{g_1} & B & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha & & \downarrow 1_B & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 & \xrightarrow{g_2} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 1_B 是恒等映射. 因 P_1 是投射模,故由定理 1.1.1 知,存在 Λ- 同态 $\alpha:P_1\to P_2$,使上图右边方块是交换的. 令 $\beta:A_1\to A_2$,使得 $\beta(a_1)=a_2$,这里 $a_1\in A_1,a_2\in A_2$ 且 $f_2(a_2)=(\alpha f_1)(a_1)$. 若 $a'_2\in A_2$,适合 $(\alpha f_1)(a_1)=f_2(a'_2)$,则得 $f_2(a_2-a'_2)=0$,但 f_2 是单同态,故 $a_2=a'_2$. 因此 β 是一个映射. 不难验证,β 是一个 Λ- 同态,并且使得上图左

边方块是交换的. 对任意$a_1 \in A_1$和$(a_2, p_1) \in A_2 \oplus P_1$, 令$\varphi: a_1 \mapsto \varphi(a_1) = (\beta(a_1), f_1(a_1))$和$\psi: (a_2, p_1) \mapsto \psi(a_2, p_1) = \alpha(p_1) - f_2(a_2)$, 易知$\varphi$和$\psi$是$\Lambda$-同态. 若$\varphi(a_1) = 0$, 则$f_1(a_1) = 0$. 但$f_1$是单同态, 故$a_1 = 0$, 亦即$\varphi$是单同态. 其次, 若$p_2 \in P_2$, 则存在$p'_1 \in P_1$, 使得$g_1(p'_1) = g_2(p_2)$. 因而$g_2(\alpha(p'_1) - p_2) = 0$. 于是存在$a'_2 \in A_2$, 满足$f_2(a'_2) = \alpha(p'_1) - p_2$, 且$\psi(a'_2, p'_1) = p_2$. 故$\psi$是满同态. 再证$\ker\psi = \mathrm{Im}\varphi$. 若$(a_2, p_1) \in \mathrm{Ker}\psi$, 则$\alpha(p_1) - f_2(a_2) = 0$. 故$g_1(p_1) = g_2\alpha(p_1) = g_2 f_2(a_2) = 0$. 因此存在$a_1 \in A$, 使得$f_1(a_1) = p_1$, 且$\varphi(a_1) = (a_2, p_1)$. 于是得$\mathrm{Ker}\psi \subseteq \mathrm{Im}\varphi$. $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\psi$是显然的, 故$\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Im}\varphi$.

综合以上讨论, 序列$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \oplus P_1 \xrightarrow{\psi} P_2 \longrightarrow 0$正合. 因$P_2$是投射模, 故由定理 1.1.1 得, $A_2 \oplus P_1 \cong A_1 \oplus P_2$.

定义 设A是左Λ-模, B是A的一个子模, 若对任意子模C, 当

$$B + C = A \to C = A,$$

则称B为A的多余子模, 记作$B \ll A$.

设$g: A \to A'$是Λ-满同态, 若$\mathrm{Ker}g \ll A$, 则称g是多余的.

定义 设A是左Λ-模, 则A的投射复盖是指一个对(P, ψ), 它满足以下条件:

(i) P是一个左Λ-投射模;

(ii) $\psi: P \to A$是多余Λ-满同态.

一个模不一定有投射复盖. 若一个模有投射复盖, 则在同构意义下是自然唯一的. 更一般地, 我们有以下结论:

设$\psi: P \to A$是Λ-模A的一个投射复盖. 若Q是Λ-投射模, 且$\varphi: Q \to A$是Λ-满同态, 则$Q = P' \oplus P''$, 使得

(i) $P' \cong P$;

(ii) P''是$\mathrm{Ker}\varphi$的子模;

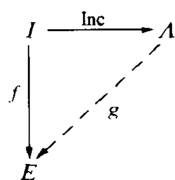
(iii) $(\varphi|P'): P' \to A$是A的投射复盖.

并且, 若$f: A_1 \to A_2$是Λ-同构, 而$\psi_1: P_1 \to A_1$和$\psi_2: P_2 \to A_2$是投射复盖, 则有Λ-同构$\bar{f}: P_1 \to P_2$, 使得$\psi_2 \bar{f} = f\psi_1$.

内射模是投射模的对偶概念.

定义 设Λ是环，E是左Λ-模，若函子$\mathrm{Hom}_\Lambda(-,E)$正合，则称$E$为内射模.

定理 1.1.4 设Λ是环，E是左Λ-模，则下列陈述是等价的：



(i) E是内射模；

(ii) 对$\mathscr{C}_\Lambda^l$内任一如右的图，其中行正合，则存在一个Λ-同态$g:B\to E$，使右图交换，即$f=gu$；

(iii) 对每个单同态$u:A\to B$，则$\mathrm{Hom}_\Lambda(u,E):\mathrm{Hom}_\Lambda(B,E)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,E)$是满的；

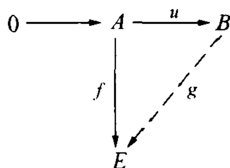
(iv) 在$\mathscr{C}_\Lambda^l$内任何短正合列$0\to E\to A\to B\to 0$是分裂正合的；

(v) 设A是任意左Λ-模，E是它的子模，则E必为A的直和项；

(vi) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,E)=0,\forall$ 左Λ-模A；

(vii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,E)=0,\forall$ 左Λ-模A和任意整数$n>0$；

(viii) （Baer 准则）对环Λ的任意左理想I和任意Λ-同态$f:I\to E$，必存在一个Λ-同态$g:\Lambda\to E$，使下图是交换的，$I\xrightarrow{\mathrm{Inc}}\Lambda$表示包含映射.



定理 1.1.4 的证明见文献[75].

内射模具有以下性质：

左Λ-模$A=\prod_{i\in I}A_i$是内射模当且仅当每个A_i是内射模. 每个模均可嵌入一个内射模内.

定义 设A是左Λ-模，B是A的一个子模，若对于A的任意子模C，当

$$B\cap C=0\Rightarrow C=0,$$

则称B是A的本质子模，记作$B\trianglelefteq A$.

设$f:A'\to A$是Λ-单同态，若$\mathrm{Im}f\trianglelefteq A$，则称$f$是本质的.

定义 设$i:A\to M$是Λ-单同态，若$\mathrm{Im}i\trianglelefteq M$，即$i$是本质单同态，则称$M$是$A$的本质扩张.

设A是Λ-模，则A的内射包络是指一个对(E,i)，它满足以下条件：

(i) E是Λ-内射模；

(ii) $i:A\to E$是本质单同态.

模A的内射包络简记为$E(A)$. 每个左Λ-模都有一个内射包络，并且在同构意义下是唯一的. 显然，模A的内射包络$E(A)$是A嵌入内射模的极小者.

定理 1.1.5 设Λ是环，则下列陈述是等价的：

(i) 内射左Λ-模的直和是内射模；

(ii) $E(\bigoplus_{i\in I}A_i)=\bigoplus_{i\in I}E(A_i)$；

(iii) Λ是左 Noether 环.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 因$E(A_i)$是内射模，并且由(i)知$\bigoplus_{i\in I}E(A_i)$是内射模，故$E(\bigoplus_{i\in I}A_i)=\bigoplus_{i\in I}E(A_i)$.

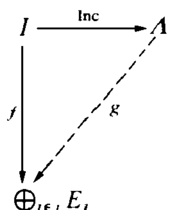
(ii)$\Rightarrow$(i) 若A_i是内射模，则$A_i=E(A_i)$. 由(ii)得$E(\bigoplus_{i\in I}A_i)=\bigoplus_{i\in I}E(A_i)=\bigoplus_{i\in I}A_i$.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{Inc}} & \Lambda \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \bigoplus_{i=1}^{\infty}E(\Lambda/I_i) & & \end{array}$$

(i)$\Rightarrow$(iii) 令$I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots$是$\Lambda$的左理想升链，则$I=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\subseteq_{\Lambda}\Lambda$. 并且，若$a\in I$，则$a\in I_i$(几乎对所有自然数$i$). 令$f:I\to\bigoplus_{i=1}^{\infty}E(\Lambda/I_i)$，使得$f(a)=(a+I_1,\cdots,a+I_n,\cdots)$，易知$f$是一个$\Lambda$-同态. 考虑右图，因$E(\Lambda/I_i)$是内射模，故由(i)知$\bigoplus_{i=1}^{\infty}E(\Lambda/I_i)$是内射模. 又由 Baer 准则知，必存在$x\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}E(\Lambda/I_i)$，使得$f(a)=ax$，$\forall a\in I$. 但$x\in\bigoplus_{i=1}^{\infty}E(\Lambda/I_i)$，故存在一个自然数$n$，使得$x=(x_1,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$，即$x_{n+k}=0$，$\forall k$. 于是得$I/I_{n+k}=Ix_{n+k}=0$. 故$I=I_{n+k}$，$\forall k$. 因此$\Lambda$是左 Noether 环.

(iii)$\Rightarrow$(i) 设$E_i(i\in J)$皆是内射模，考虑下面右边的图，因Λ是 Noether 环，I为 f.g. 理想，故$\mathrm{Im}f\subseteq\bigoplus_F E_\alpha$，$F$是$J$的一个有限子集. 于是知$\bigoplus_F E_\alpha$是内射模. 由 Baer 准则，必存在$x\in\bigoplus_F E_\alpha$，使得$f(a)=ax$，$\forall a\in I$. 但$\bigoplus_F E_\alpha\subseteq\bigoplus_{i\in J}E_i$，因而必有$\Lambda$-同态$g:\Lambda\to\bigoplus_{i\in J}E_i$，使得下图是

交换的. 故 $\oplus_{i\in J}E_i$ 是内射模.



生成元和余生成元是两个对偶概念，它们分别在模范畴的等价和对偶性理论中，有着重要作用.

定义 设 G 是左 Λ- 模，若函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(G, -)$ 是忠实的，亦即对任意左 Λ- 模 A 和 $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$，映射 $f\to\mathrm{Hom}_\Lambda(G,f)$ 是 Abel 群单同态，则称 Λ- 模 G 为范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的一个生成元.

对偶地，设 C 是左 Λ- 模，若函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,C)$ 是忠实的，则称 Λ- 模 C 为范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的一个余生成元.

定义 设 A,B 是左 Λ- 模，若存在正合序列

$$A^{(I)}\to B\to 0(0\to B\to A^I),$$

则称模 A 生成(余生成) 模 B.

令 $\quad \mathrm{Tr}_B(A)=\sum\{\mathrm{Im}h\,|\,h\in\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\}$;

$\qquad \mathrm{Rej}_B(A)=\bigcap\{\mathrm{Ker}h\,|\,h\in\mathrm{Hom}_\Lambda(B,A)\}$,

并分别称为 A 在 B 内的迹和亦迹.

设 A 是左 Λ- 模，记 $l_\Lambda(A)=\{\lambda\in\Lambda\,|\,\lambda a=0,\forall\, a\in A\}$，把它叫做 A 在 Λ 内的零化子. 如果 $l_\Lambda(A)=0$，就把模 A 叫做忠实的.

容易证明以下性质:

(i) A 生成(余生成) $B\Leftrightarrow\mathrm{Tr}_B(A)=B$ $(\mathrm{Rej}_B(A)=0)$;

(ii) $\mathrm{Rej}_\Lambda(A)=l_\Lambda(A)$. 特别地，$A$ 余生成 $\Lambda\Leftrightarrow A$ 是忠实模.

(iii) $\mathrm{Tr}_\Lambda(A)$ 是环 Λ 的双边理想.

定理 1.1.6 设 Λ 是环，G 是左 Λ- 模，则下列陈述是等价的:

(i) G 是范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的生成元;

(ii) 对任意左 Λ- 模 A，必有 $A=\sum_{h\in H}\mathrm{Im}h$，$H=\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$;

(iii) G 生成 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 中每个模;

(iv) $G^{(I)}=A\oplus B$，其中 A 是左 Λ- 自由模;

(v) 对任意左 Λ-同态 f，若 $\mathrm{Hom}_\Lambda(G,f)$ 是满同态，则 f 是满同态;

(vi) 对任意左 Λ- 模序列 $\quad A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''$，若序列

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A')\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A'')$$

正合，则原序列也正合，这里 $f_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,f)$.

证明 (i)⇒(ii) 令 $B = \sum_{h\in H}\mathrm{Im}h$，$\pi: A \to A/B$ 为自然 Λ- 同态. 又设 $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(G, -)$，则有 Z- 同态

$$F(\pi):\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A/B),$$

使得 $\forall\, h \in H = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$，$F(\pi)(h) = \pi h$. 因 $h(G) \subseteq B = \mathrm{Ker}\pi$，故 $\pi h = 0$. 但 G 是 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的生成元，于是得 $\pi = 0$. 所以 $A = \sum_{h\in H}\mathrm{Im}h$.

(ii)⇒(iii) 设 A 是任意左 Λ- 模，记 $H = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$，对任意 $\{a_f \mid f \in H\} \in G^{(H)}$，规定 $\psi: \{a_f\} \mapsto \sum_{f\in H} f(a_f)$. 容易看出 $\psi: G^{(H)} \to A$ 是 Λ- 同态，且对任意 $f \in H$ 皆有 $f(G) \subseteq \psi(G^{(H)})$. 因而 $\sum_{f\in H} f(G) \subseteq \psi(G^{(H)})$. 由 (ii) 知 $A = \sum_{f\in H} f(G)$. 故 $A \subseteq \psi(G^{(H)})$. 从而 $A = \psi(G^{(H)})$. 即 $G^{(H)} \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0$ 正合. 故 G 生成 A.

(iii)⇒(iv) 设 A 是左 Λ- 自由模，由 (iii) 得正合列 $0 \to B \to G^{(I)} \to A \to 0$. 因 A 是自由模，故由定理 1.1.1 得 $G^{(I)} \cong A \oplus B$.

(iv)⇒(i) 设 $G^{(I)} = A \oplus B$，其中 A 是左 Λ- 自由模，又假定 A 有一个基，它只有一个元素比如 e，这样做不会失掉证明的一般性.

设 C 是任意左 Λ- 模，对任意 $c \in C$，规定 $g_c: G^{(I)} \to C$，使得 $g_c: \lambda e + b \mapsto \lambda c$，$\forall\, \lambda \in \Lambda, b \in B$，则 g_c 是一个 Λ- 同态，且 $g_c(e) = c$. 因而 $C = \sum_{g\in \mathrm{Hom}_\Lambda(G^{(I)},C)}\mathrm{Im}g$. 于是可知，若 $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(G^{(I)},f) \neq 0$. 因此得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(G,f) \neq 0$. 故 G 是 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的生成元.

(i)⇒(vi) 若 $\mathrm{ker}g_* = \mathrm{Im}f_*$，则得

$$0 = g_* f_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,g)\mathrm{Hom}_\Lambda(G,f) = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,gf).$$

由 (i) 知 $gf = 0$. 故 $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Ker}g$.

任取 $x \in \mathrm{Ker}g$，因 G 是生成元，故由上面证明得 $\mathrm{Ker}g = \sum_{h\in H}\mathrm{Im}h$，$H = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,\mathrm{Ker}g)$. 所以 $x = \sum_{i=1}^n h_i(y_i)$，这里 $h_i \in H$，$y_i \in G$，$\forall\, i$. 但 $\mathrm{Ker}g \subseteq A$，故 $h_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$，且 $gh_i = g_*(h_i) = 0$. 因而 $h_i \in \mathrm{Ker}g_* = \mathrm{Im}f_*$. 于是存在 $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A')$，使得 $f_*(\varphi_i) = h_i$，亦即 $f\varphi_i = h_i$. 所以 $x = \sum_{i=1}^n f\varphi_i(y_i) \in \mathrm{Im}f$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$.

(vi)⇒(v)　若有 Λ-模的序列 $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$，且序列 $\mathrm{Hom}_\Lambda(G,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(G,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(G,0)$ 正合，则由(vi)知 $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ 也正合. 故 $f: A \longrightarrow B$ 是满同态.

(v)⇒(i)　对任意左 Λ-模 A，必有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tr}_A(G) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{n_A} A/\mathrm{Tr}_A(G) \longrightarrow 0,$$

这里 i 是包含映射，n_A 是自然同态. 于是得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(G,\mathrm{Tr}_A(G)) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A) \xrightarrow{(n_A)_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A/\mathrm{Tr}_A(G)).$$

任取 $\beta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$，因 $(n_A)_*\beta(G) = n_A\beta(G) = 0$，故 $\mathrm{Ker}(n_A)_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$. 由于 $\mathrm{Im}i_* = \mathrm{Ker}(n_A)_*$，因此，$\mathrm{Im}i_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A)$. 故 i_* 是满同态. 由(v)知 i 也是满同态，于是得 $\mathrm{Tr}_A(G) = A$. 故 G 生成模 A. 由上面证明知，G 是 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的生成元.

对偶地有：

定理 1.1.7　设 Λ 是环，C 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i)　C 是范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的余生成元；

(ii) 对任意左 Λ-模 A，必有 $\bigcap_{h\in H}\mathrm{ker}h = 0, H = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)$；

(iii)　C 余生成 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 中每个模；

(iv) 对任意左 Λ-同态 f，若 $\mathrm{Hom}_\Lambda(f,C)$ 是满同态，则 f 是单同态；

(v) 对任意左 Λ-模序列 $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$，若序列

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A'',C) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A,C) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A',C)$$

正合，则原序列也正合，这里 $f^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(f,C)$.

由定理 1.1.6 知，任意非零自由左 Λ-模是 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的投射生成元. 令 H_0 代表 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 内单纯模的不可缩短的代表集，亦即每个单纯左 Λ-模与 H_0 中某个单模同构，且 H_0 中任意两个皆不同构，则 $C_0 = \bigoplus_{T\in H_0}E(T)$ 是 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 的余生成元.

1.2 平坦模

平坦模是由函子 $\otimes$ 的正合性所决定的模类，它比投射模广泛.

定义 设 Λ 是环，U 是右 Λ-模，若函子 $U\otimes_\Lambda -$ 是正合的，则称 U 为平坦模.

定理 1.2.1 设 Λ 是环，U 是右 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) U 是平坦模；

(ii) 令 $U^* = \mathrm{Hom}_Z(U,C)$，这里 Z 是整数环，C 是范畴 $\mathscr{C}_Z$ 的内射余生成元，则 U^* 是左 Λ-内射模；

(iii) 对环 Λ 的每个左理想 I，令 $\mu_I: U\otimes_\Lambda I \to UI$，使得 $\mu_I(u\otimes a) = ua$，$\forall\ u\in U, a\in I$，则 μ_I 是单同态；

(iv) 若 $\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j = 0, x_j\in U, \lambda_j\in\Lambda$，则存在 $y_i\in U$ 和 $\mu_{ij}\in\Lambda(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2\cdots,n)$，使得

$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}\lambda_j = 0(\forall\ i)$ 和 $\sum_{i=1}^m y_i\mu_{ij} = x_j(\forall\ j)$；

(v) 对环 Λ 的每个左理想 I，皆有 $\mathrm{Tor}_\Lambda^1(U,\Lambda/I) = 0$.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 I 是环 Λ 的任意左理想，若 U 是平坦模，则有正合列 $0\to U\otimes_\Lambda I\to U\otimes_\Lambda\Lambda$. 因 C 是 Z-内射模，故得下面交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda\Lambda,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda I,C) & \longrightarrow & 0 \\
\varphi_\Lambda\downarrow & & \downarrow\varphi_I & & \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,\mathrm{Hom}_Z(U,C)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(I,\mathrm{Hom}_Z(U,C)) & \to & 0
\end{array}$$

其中行正合，φ_Λ 和 φ_I 是同构. 于是对任意 $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(I,U^*)$，必存在 $g\in\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,U^*)$，使得 $f = gh$，这里 $h: I\longrightarrow\Lambda$ 是包含映射. 由 Baer 准则知 U^* 是内射模.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 因 U^* 是内射模，故由正合列 $0\longrightarrow I\xrightarrow{i_I}\Lambda$ 得正合列 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,U^*)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(I,U^*)\longrightarrow 0$. 于是又得正合列

$$\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda\Lambda,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda I,C)\longrightarrow 0.$$

因 C 是余生成元，故由定理 1.1.7 知序列 $0\longrightarrow U\otimes_\Lambda I\xrightarrow{U\otimes i_I}U\otimes_\Lambda\Lambda$

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & U\otimes_\Lambda I & \xrightarrow{U\otimes i_{UI}} & U\otimes_\Lambda \Lambda \\
& \downarrow{\scriptstyle \mu_I} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
& UI & \xrightarrow{i_{UI}} & U
\end{array}
\qquad (1)
$$

正合. 考虑上面交换图(1),因 μ 是同构,$U\otimes i_I$ 和 i_{UI} 是单同态,故 μ_I 是单同态.

(iii)⇒(i) 因 μ_I 是单同态,故由交换图(1)知 $U\otimes i_I$ 也是单同态. 所以 $U^* = \mathrm{Hom}_Z(U,C)$ 是左 Λ- 内射模,C 是 $\mathscr{C}_Z$ 的内射余生成元. 若 $0\to A\to B$ 是任意左 Λ- 模正合列,因 C 是 $\mathscr{C}_Z$ 的内射余生成元,仿照 (ii)⇒(iii) 的证明,可得 $0\to U\otimes_\Lambda A\to U\otimes_\Lambda B$ 正合. 故 U 是平坦模.

(i)⇔(iv) 若 U 是平坦模,且 $\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j = 0$,$x_j\in U$,$\lambda_j\in\Lambda$,考虑正合列 $0\longrightarrow K\xrightarrow{i_K}F\xrightarrow{f}I\longrightarrow 0$,这里 F 是 f. g. 自由左 Λ- 模,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是它的基,$I=\sum_{j=1}^n\Lambda\lambda_j$,$f(e_j)=\lambda_j$,$\forall\ j$. 因 U 是平坦模,故有正合列

$$0\longrightarrow U\otimes_\Lambda K\xrightarrow{U\otimes i_K}U\otimes_\Lambda F\xrightarrow{U\otimes f}U\otimes_\Lambda I\longrightarrow 0.$$

由上面证明知 $\mu_I:U\otimes_\Lambda I\cong UI$,这里 $\mu_I(u\otimes a)=ua$,$u\in U$ 和 $a\in I$. 于是由 $\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j=0$ 得

$$0=\sum_{j=1}^n x_j\otimes\lambda_j=\sum_{j=1}^n x_j\otimes f(e_j).$$

因此 $\sum_{j=1}^n x_j\otimes e_j\in\mathrm{Ker}(U\otimes f)=\mathrm{Im}(U\otimes i_K)$. 故必存在 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in U$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in K$,使得

$$\sum_{j=1}^n x_j\otimes e_j=\sum_{i=1}^m y_i\otimes k_i.$$

因 $k_i\in F$,$k_i=\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e_j$,这里 $\mu_{ij}\in\Lambda(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,故

$$\sum_{j=1}^n\mu_{ij}\lambda_j=\sum_{j=1}^n\mu_{ij}f(e_j)=f\Big(\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e_j\Big)=f(k_i)=0,\forall\ i,$$

并且 $\sum_{j=1}^{n}(x_j \otimes e_j) = \sum_{i=1}^{m} y_i \otimes k_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e_j \right)$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i \mu_{ij} \right) \otimes e_j.$$

$\therefore \quad x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \mu_{ij}, \forall\ j.$

反过来，设 I 是环 Λ 的任意左理想，考虑同态 $\mu_I : U \otimes_\Lambda I \to UI$，这里 $\mu_I(u \otimes a) = ua, u \in U, a \in I$. 若 $\sum_{j=1}^{n} u_j a_j = 0, u_j \in U$ 和 $a_j \in I$. 由(iv)知存在 $y_i \in U$ 和 $\mu_{ij} \in \Lambda (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} a_j = 0 (\forall\ j) \text{ 和 } \sum_{i=1}^{m} y_i \mu_{ij} = u_j.$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i \mu_{ij} \right) \otimes a_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} a_j \right) = 0.$$

因此 μ_I 是单同态. 由上面证明知 U 是平坦模.

(i)$\Leftrightarrow$(v)　若 U 是平坦模，则显然 $\mathrm{Tor}_\Lambda^1(U, \Lambda/I) = 0$. 反过来，考虑正合列 $0 \to I \to \Lambda \to \Lambda/I \to 0$. 由(v)得正合列

$$0 \to U \otimes_\Lambda I \to U \otimes_\Lambda \Lambda \to U \otimes_\Lambda \Lambda/I \to 0.$$

应用上面的证明知 U 是平坦模.

推论 1.2.2　设 Λ 是环，$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i_K} B \xrightarrow{f} U \longrightarrow 0$ 是右 Λ-模的正合列，其中 B 是平坦模，则 U 是平坦模当且仅当对环 Λ 的每个左理想 I，均有 $KI = K \cap BI$.

证明　考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ K \otimes_\Lambda I & \xrightarrow{i_k \otimes I} & B \otimes_\Lambda I & \xrightarrow{f \otimes I} & U \otimes_\Lambda I \to 0 \\ \mu \downarrow & & \mu_I \downarrow & & \downarrow \mu'_I \\ K \cap BI & \xrightarrow{Inc} & BI & \xrightarrow{f|_{BI}} & UI \end{array}$$

因 B 是平坦模，故由定理 1.2.1，μ_I 是同构. 又因 $-\otimes_\Lambda I$ 是右正合的，故上图第一行正合，$\mu(k \otimes a) = ka, \forall\ k \in K, a \in I$. 由定理 1.2.1，$U$ 是平坦模 $\Leftrightarrow \mu'_I$ 是单同态. 但 μ'_I 是单同态 $\Leftrightarrow \mu$ 是满同态，而 $\mathrm{Im}\mu = KI \subseteq$

$K \cap BI$,于是得知 μ 是满同态当且仅当 $KI = K \cap BI$.

设 I 是环 Λ 的任意左理想,则 $I = \varinjlim I_k$,I_k 是 ${}_\Lambda I$ 的 f.g. 子模. 由于 $U \otimes -$ 保持 $\varinjlim$,因此,定理 1.2.1 中的陈述(iii)、(v) 和推论 1.2.2,要求 I 是环 Λ 的任意 f.g. 左理想,结论仍然成立.

$\bigoplus U_\alpha$ 是平坦模当且仅当每个 U_α 是平坦模.

投射模是平坦模,但平坦模不一定是投射模.

定义 设 Λ 是环,A 是左 Λ- 模,若存在一个正合列 $F_1 \to F_0 \to A \to 0$,其中 F_1,F_0 是 f.g. 自由 Λ- 模,则称 A 为有限表现(也称为有限相关)的模.

以后,我们用 f.p. 表示有限表现.

命题 1.2.3 设 Λ 是环,C 是 f.p. 左 Λ- 模. 若序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合,且 B 是 f.g. 的,则 A 是 f.g. 的.

证明 考虑右边的交换图,其中行均正合,F_1,F_0 是 f.g. 自由模. 易知 β 是满同态,故 A 是 f.g.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & F_1 & \xrightarrow{f'} & F_0 & \xrightarrow{g'} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle 1_C} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由命题 1.2.3 知,模 A 是 f.p. 当且仅当存在正合列 $0 \to K \to F \to A \to 0$,$F$ 是自由的,且 F 和 K 皆为 f.g..

命题 1.2.4 (i) 每个 f.g. 投射模是 f.p.;

(ii) 每个 f.p. 的平坦模是投射模.

证明 (i) 若 P 是 f.g. 投射左 Λ- 模,则由推论 1.1.2 得 $\Lambda^{(n)} = P \oplus P'$. 于是有正合列 $0 \to P' \to \Lambda^{(n)} \to P \to 0$. 因 $\Lambda^{(n)}$ 是自由的,且 $\Lambda^{(n)}$ 和 P' 为 f.g.,故 P 是 f.p. 的.

(ii) 设 B 是 f.p. 平坦右 Λ- 模,于是得正合列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$,其中 F 是 f.g. 自由模,$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是它的一个基,K 是 f.g.,$\{v_1, v_1, \cdots v_m\}$ 是它的生成集. 不失一般性,假设 g 是包含映射. 首先,我们证明:若 $u_1, u_2, \cdots, u_s \in K$,则存在 Λ- 同态 $\sigma: F \to K$,使 $\sigma(u_i) = u_i$,$i = 1, 2, \cdots, s$. 用归纳法,设 $s = 1$,令 $u_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j$,用 $I(u_1)$ 表示由 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 所生成的左理想. 因 B 是平坦模,由推论 1.2.2,得

$u_1 \in KI(u_1)$，故 $u_1 = \sum_{t=1}^{l} k_t a_t, k_t \in K, a_t = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{tj}\lambda_j, \gamma_{tj} \in \Lambda, \forall j$. 于是得

$$u_1 = \sum_{t=1}^{l} k_t \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{tj}\lambda_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{l} k_t\gamma_{tj} \right) \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} k'_j \lambda_j,$$

这里 $k'_j = \sum_{t=1}^{l} k_t\gamma_{tj} \in K, \forall j$. 规定 $\sigma_1 : F \to K$，使 $\sigma_1(x_j) = k'_j$，$\forall j$，则 σ_1 是 Λ- 同态，且 $\sigma_1(u_1) = u_1$. 若 $s > 1$，仿照上面方法，必得到一个 Λ- 同态 $\sigma_s : F \to K$，使 $\sigma_s(u_s) = u_s$. 令 $u'_i = u_i - \sigma_s(u_i)$，由归纳法的假设，有 Λ- 同态 $\sigma' : F \to K$，使 $\sigma'(u'_i) = u'_i$. 最后，对任意 $x \in F$，定义 $\sigma(x) = \sigma_s(x) + \sigma'(x - \sigma_s(x))$. 易知 σ 是 F 到 K 的 Λ- 同态，且 $\sigma(u_i) = u_i$，$\forall i$.

若取 K 的生成集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，则由上面证明知，有 Λ- 同态 $\sigma : F \to K$，使 $\sigma(v_i) = v_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 而 $g(v_i) = v_i$，故 $\sigma g(v_i) = v_i$. 因此 $\sigma g = 1_K$. 所以序列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ 分裂正合，B 是投射模.

平坦模和纯子模之间有着深刻联系.

定义 设 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 是左 Λ- 模正合列，若对任意右 Λ- 模 B，序列 $0 \to B \otimes_\Lambda A' \to B \otimes_\Lambda A \to B \otimes_\Lambda A'' \to 0$ 正合，则称此序列为纯正合的.

由于每个模 $B = \varinjlim B_\alpha$，其中 B_α 是 B 的 f. g. 子模，而 $B_\alpha = \varinjlim B'_\beta$，$B'_\beta$ 是 B_α 的 f. p. 子模，且 $- \otimes A$ 保持 $\varinjlim$，因此，正合列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 是纯的当且仅当对任意 f. p. 右 Λ- 模 B，$0 \to B \otimes_\Lambda A' \to B \otimes_\Lambda A \to B \otimes_\Lambda A'' \to 0$ 正合.

设 A' 是左 Λ- 模 A 的子模，若正合列 $0 \to A' \to A \to A/A' \to 0$ 是纯的，则称 A' 为 A 的纯子模.

命题 1.2.5 设 U 是左 Λ- 模，则下列陈述是等价的：

(i) U 是平坦模；

(ii) 任何短正合列 $0 \to A' \to A \to U \to 0$ 是纯的；

(iii) 存在一个纯正合列 $0 \to A' \to A \to U \to 0$，其中 A 是平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 设 B 是右 Λ- 模，于是得正合列 $0 \to K \to F \to B \to 0$，其中 F 是自由模. 因而，又得下面的交换图(2)，其中行和列皆正合. 因 U 是平坦模，故 α 是单同态. 我们要证 β 是单同态. 若 $x \in \mathrm{Ker}\beta$，

则必存在 $y \in F \otimes A'$，使 $\psi(y) = x, \mu(y) \in F \otimes_\Lambda A$. 因 $\theta\mu(y) = \beta\psi(y) = 0$，故存在 $z \in K \otimes_\Lambda A$，使 $\delta(z) = \mu(y), \eta(z) \in K \otimes_\Lambda U$. 因 $\alpha\eta(z) = \varphi\delta(z) = \varphi\mu(y) = 0$，且 α 是单同态，故得 $\eta(z) = 0$. 因而，必存

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & K \otimes_\Lambda A' & \xrightarrow{\rho} & K \otimes_\Lambda A & \xrightarrow{\eta} & K \otimes_\Lambda U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
0 & \rightarrow & F \otimes_\Lambda A' & \xrightarrow{\mu} & F \otimes_\Lambda A & \xrightarrow{\varphi} & F \otimes_\Lambda U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow & & \\
 & & B \otimes A' & \xrightarrow{\beta} & B \otimes A & \longrightarrow & B \otimes U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (2)
$$

$v \in K \otimes_\Lambda A'$，使 $\rho(\mathrm{v}) = z$. 故 $\mu\sigma(\mathrm{v}) = \delta\rho(\mathrm{v}) = \delta(z) = \mu(y)$. 因为 μ 是单同态，所以 $\sigma(\mathrm{v}) = y$. 于是得 $x = \psi(y) = \psi\sigma(\mathrm{v}) = 0$. 故 β 是单同态.

(ii)$\Rightarrow$(iii)　取正合列 $0 \to K \to F \to U \to 0$，其中 F 是自由模. 由 (ii) 知此序列是纯正合的，F 是自由模，因而是平坦模.

(iii)$\Rightarrow$(i)　设 $0 \to A' \to A \to U \to 0$ 是一个纯正合列，A 是平坦模. 考虑任意右 Λ-模的正合列 $0 \to K \to F \to B \to 0$，得交换图(2)，其中中间一列代替中间一行是正合的，β 是单同态. 我们要证 α 是单同态. 类似于(i)$\Rightarrow$(ii) 的方法，便推得 α 是单同态. 故 U 是平坦模.

由命题 1.2.5 知，A 的子模 A' 是纯子模 $\Leftrightarrow A/A'$ 是平坦模.

定理 1.2.6　设 Λ 是环，A' 是右 Λ-模 A 的子模，则下列陈述是等价的：

(i) A' 是 A 的纯子模；

(ii) 对任意 f.p. 右 Λ-模 B，序列

$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A/A') \to 0$

正合；

(iii) 对任意 $y_j \in A'(j = 1, 2, \cdots, n), \lambda_{ij} \in \Lambda(i = 1, 2, \cdots, m)$，若 $y_j = \sum_{i=1}^m x_i \lambda_{ij}$，其中 $x_i \in A, \forall\, i, j$，则存在元素 $x'_i \in A'$，使

$y_j = \sum_{i=1}^{m} x'_i \lambda_{ij}, \forall j$;

(iv) 对任意下面的交换图,必存在 Λ- 同态 $F_0 \to A'$,使得该图交换,其中 F_1, F_0 是 f.g. 的自由模,$i_{A'}$ 是包含映射.

$$\begin{array}{ccccc} & & F_1 & \xrightarrow{\alpha} & F_0 \\ & & \downarrow \varphi & \swarrow \beta & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i_{A'}} & A \end{array}$$

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 若 A' 是 A 的纯子模,则序列 $0 \to A' \to A \to A/A' \to 0$ 是纯正合的. 因而,

$$0 \to \mathrm{Hom}_Z(A/A', Q/Z) \to \mathrm{Hom}_Z(A, Q/Z) \to \mathrm{Hom}_Z(A', Q/Z) \to 0 \quad (3)$$

也是纯正合的,其中 Q 是有理数加法群,Z 是整数环. 记 $A^* = \mathrm{Hom}_Z(A, Q/Z)$,其中 A 是任意右 Λ- 模. 对任意 f.p. 右 Λ- 模 B,必有交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B \otimes_\Lambda (A/A')^* & \longrightarrow & B \otimes_\Lambda A^* & \longrightarrow & B \otimes_\Lambda (A')^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A/A')^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A)^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A')^* & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4)$$

其中垂直映射皆为同构. 由于上一行是正合的,因此下一行也正合. 于是序列 $0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A/A') \to 0$ 正合.

反过来,若对任意 f.p. 右 Λ- 模 B,序列 $0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A/A') \to 0$ 正合,则得交换图(4). 由于下一行正合,因此上一行也正合. 所以,序列 $0 \to \mathrm{Hom}_Z(A/A', Q/Z) \to \mathrm{Hom}_Z(A, Q/Z) \to \mathrm{Hom}_Z(A', Q/Z) \to 0$ 是纯正合的. 故原序列 $0 \to A' \to A \to A/A' \to 0$ 也是纯正合的.

(i)$\Leftrightarrow$(iii) 若(iii)成立,设 B 是 f.p. 左 Λ- 模,要证 $A' \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B$ 是单同态. 因 B 是 f.p. 的,于是得正合列 $\Lambda^{(m)} \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{(n)} \xrightarrow{\beta} B$

$\longrightarrow 0$，这里 $\alpha:(a_i)\to(\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}a_i)$，从而又有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A'\otimes_\Lambda A^{(m)} & \xrightarrow{A'\otimes\alpha} & A'\otimes_\Lambda\Lambda^{(n)} & \xrightarrow{A'\otimes\beta} & A'\otimes_\Lambda B & \longrightarrow & 0\\ {\scriptstyle i\otimes\Lambda^{(m)}}\downarrow & & {\scriptstyle i\otimes\Lambda^{(n)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes B} & & \\ A\otimes_\Lambda\Lambda^{(m)} & \xrightarrow{A\otimes\alpha} & A\otimes_\Lambda\Lambda^{(n)} & \xrightarrow{A\otimes\beta} & A\otimes_\Lambda B & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5}$$

其中行皆正合，i 是包含映射，$i\otimes\Lambda^{(m)}$ 和 $i\otimes\Lambda^{(n)}$ 是单同态. 由交换图(5)知，$i\otimes B$ 是单同态当且仅当

$$\operatorname{Im}(A\otimes\alpha)\cap\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})=\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})(A'\otimes\alpha). \tag{6}$$

若$(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in A^{(m)}\cong A\otimes_\Lambda A^{(m)}$，它在映射 $A\otimes\alpha$ 下的象 $u=\sum_{i=1}^{m}x_i\otimes(\lambda_{ij})\in A\otimes_\Lambda\Lambda^{(n)}$，并且$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in A'^{(n)}\simeq A'\otimes_\Lambda\Lambda^{(n)}$ 在映射 $i\otimes\Lambda^{(n)}$ 下的象也是 u，则 $y_j=\sum_{i=1}^{m}x_i\lambda_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$. 由(iii)知，必存在元素 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_m\in A'$，使 $y_j=\sum_{i=1}^{m}x'_i\lambda_{ij},\forall j$. 于是 u 也是元素$(x'_1,x'_2,\cdots,x'_m)\in A'^{(m)}\cong A'\otimes_\Lambda\Lambda^{(m)}$ 在映射$(i\otimes_\Lambda{}^{(n)})(A'\otimes\alpha)$ 下的象. 故 $\operatorname{Im}(A\otimes\alpha)\cap\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})\subseteq\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})(A'\otimes\alpha)$. 易知又有 $\operatorname{Im}(A\otimes\alpha)\cap\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})\supseteq\operatorname{Im}(i\otimes\Lambda^{(n)})(A'\otimes\alpha)$. 因此(6)式成立. 所以 $i\otimes B$ 是单同态，A' 是 A 的纯子模.

反过来，应用 λ_{ij}，规定映射 $\alpha:\Lambda^{(m)}\to\Lambda^{(n)}$，使得 $\alpha(a_i)=\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}a_i\right)$，$(a_i)\in\Lambda^{(m)}$，则 α 是一个 Λ-同态. 令 $B=\Lambda^{(n)}/\operatorname{Im}\alpha$，于是得正合列 $\Lambda^{(m)}\xrightarrow{\alpha}\Lambda^{(n)}\to B\to 0$. 因而又得交换图(5). 由于 A' 是 A 的纯子模，$i\otimes B$ 是单同态，因此(6)式成立. 由上面讨论知，若 $y_j=\sum_{i=1}^{m}x_i\lambda_{ij}$，其中 $x_i\in A$，$j=1,2,\cdots,n$，则存在元素 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_m$，使得 $y_j=\sum_{i=1}^{m}x'_i\lambda_{ij},\forall j$.

(iii)⇔(iv)　若(iii)成立，并有下面交换图(7)，其中 F_1 和 F_0 是 f.g. 的自由右 Λ-模，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_m\}$ 分别是它们的基. 令 $\alpha(e_j)=\sum_{i=1}^{m}e'_i\lambda_{ij}$，$\lambda_{ij}\in\Lambda$，$j=1,2,\cdots,n$，$y_j=\varphi(e_j)$，$x_i=\psi(e'_i)$，$\forall i,j$. 由交换图(7)，得

$$y_j=\sum_{i=1}^{m}x_i\lambda_{ij},\forall j.$$

由(iii)知，必存在元素 $x'_i \in A'$，使 $y_j = \sum_{i=1}^{m} x'_i \lambda_{ij}$，$\forall j$. 规定 $\beta: F_0 \to A'$，使 $\beta(e'_i) = x'_i$，$\forall i$，则 β 是 Λ- 同态，并且使图(7)是交换的.

$$\begin{array}{ccccc} & & F_1 & \xrightarrow{\alpha} & F_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \swarrow{\scriptstyle\beta} & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A \end{array} \tag{7}$$

反过来，若 $y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_{ij}$，其中 $x_i \in A$，$\lambda_{ij} \in \Lambda$，$y_j \in A'$，$j = 1, 2, \cdots, n$，考虑下图(8)，其中 $\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{m} e'_i \lambda_{ij}$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_m\}$ 分别是 $\Lambda^{(n)}$ 和 $\Lambda^{(m)}$ 的基，$\varphi(e_j) = y_j$，$\psi(e'_i) = x_i$，$\forall i, j$. 易知此图是交换的，并由(iv)知存在 Λ-同态 $\Lambda^{(m)} \to A'$，使得图(8)交换. 故有元素 $x'_i \in A'$，使 $y_j = \sum_{i=1}^{m} x'_i \lambda_{ij}$，$\forall j$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda^{(n)} & \xrightarrow{\alpha} & \Lambda^{(m)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A \end{array} \tag{8}$$

推论 1.2.7 设 $0 \to K \to F \to U \to 0$ 是右 Λ- 模的正合列，其中 U 是平坦模，F 是自由模，则对 K 中任意有限个元素 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，必存在一个 Λ- 同态 $\varphi: F \to K$，使得 $\varphi(u_j) = u_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$.

证明 首先，有

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{9}$$

这里 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 是自由模 F 的基的一部分元素. 因 U 是平坦模，故由命题 1.2.5 知，正合列 $0 \to K \to F \to U \to 0$ 是纯的. 又由定理 1.2.6，存在元素 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m \in K$，使得(9)式成立. 规定 $\varphi: F \to K$，使得 $\varphi(x_i) = x'_i$，则 φ 是一个 Λ- 同态，并且有

$$\varphi(u_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} x'_i \lambda_{ij} = u_j.$$

定义 设 Λ 是环，A 是右 Λ- 模. 若对任意右 Λ- 模 B，且 A 是 B 的子模，A 必为 B 的纯子模，则称 A 是绝对纯模.

命题 1.2.8 内射模的纯子模必是绝对纯的.

证明 设 E 是右 Λ- 内射模，A 是它的纯子模. 令 B 是任意右 Λ-模，且 A 是它的子模，考虑下图(10)，其中 i 是包含映射. 因 E 是内射模，故存在 Λ- 同态 $f: B \to E$，使图(10)交换. 若对任意 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in$

A，满足 $y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_{ij}, j = 1,2,\cdots,n$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in B, \lambda_{ij} \in \Lambda, \forall\, i,j$，则由交换图(10)，得

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow A & \xrightarrow{\ i\ } & B \\ \downarrow i & \swarrow f & \\ E & & \end{array} \qquad (10)$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\lambda_{ij}, f(x_i) \in E.$$

因 A 是 E 的纯子模，故由定理 1.2.6 知，

存在 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m \in A$，使得 $y_j = \sum_{i=1}^{m} x'_i \lambda_{ij}$. 所以 A 是 B 的纯子模.

1.3 凝聚环

凝聚环是比 Noether 环更广泛的一类环. 1960 年，Chase 首先在文献[18]中研究了凝聚环，直到 1964 年 Bourbaki 才正式提出了凝聚环的概念. 本节主要介绍 Chase 定理.

定义 设 A 是左 Λ- 模，若

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to A \to 0 \qquad (1)$$

是左 Λ- 模的正合列，每个 F_i 是 f.g. 自由模，则称正合列(1)为模 A 的有限 n- 表示. 设 A 是 f.g. 左 Λ- 模，记 $\lambda(A) = \sup\{n \mid A$ 具有有限 n- 表示$\}$. 若 A 不是有限生成的，则规定 $\lambda(A) = -1$.

显然，模 A 是有限生成的 $\Leftrightarrow \lambda(A) \geqslant 0$，而 A 是有限表现的 $\Leftrightarrow \lambda(A) \geqslant 1$.

定理 1.3.1 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是左 Λ- 模的正合列，则

(i) $\lambda(B) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(A), \lambda(C)\}$;

(ii) $\lambda(C) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(B), \lambda(A)+1\}$;

(iii) $\lambda(A) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(B), \lambda(C)-1\}$;

(iv) 若 $B = A \oplus C$，则 $\lambda(B) = \operatorname{Inf}\{\lambda(A), \lambda(C)\}$.

证明 (i) 设 $\lambda(C) = m, \lambda(A) = n$，于是得下面的交换图(2)，其中行、列皆正合，每个 F_i 和 F'_i 都是 f.g. 自由模. 所以

$$\lambda(B) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(A), \lambda(C)\}.$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F_n & \longrightarrow & F_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & & & & \cdots & \longrightarrow & F_1 \oplus F'_1 & \longrightarrow & F_0 \oplus F'_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F'_m & \longrightarrow & F'_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (2)
$$

(ii) 设 $n = \operatorname{Inf}\{\lambda(B), \lambda(A)+1\}$. 当 $n=0$ 时, $\lambda(B) \geqslant 0, \lambda(A)+1 \geqslant 0$. 于是 B 为有限生成的. 从而 C 也是有限生成的. 故 $\lambda(C) \geqslant 0$. 当 $n=-1$ 时, 总有 $\lambda(C) \geqslant -1$. 这样, 对于 $n \leqslant 0$, 必有 $\lambda(C) \geqslant n$. 若 $n \geqslant 1$, 则 $\lambda(A) \geqslant n-1$ 且 $\lambda(C) \geqslant n-1$. 因而又得交换图

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & F_{n-1} & \longrightarrow & F_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & A & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} f & \longrightarrow & F_{n-1} \oplus F'_{n-1} & \xrightarrow{f} & F_{n-2} \oplus F'_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 \oplus F'_1 & \longrightarrow & F_0 \oplus F'_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & F'_{n-1} & \longrightarrow & F'_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

其中行、列皆正合, 每个 F_i 和 F'_j 都是 f.g. 自由模. 若 $\lambda(C) < n$, 则 $\lambda(B) \geqslant n > \lambda(C) = n-1$. 因此 $\operatorname{Ker} f$ 必是有限生成的. 从而由交换图必得到模 C 的一个有限 n- 表示. 这就导出矛盾, 所以 $\lambda(C) \geqslant n$.

(iii) 用类似于(ii) 的证明方法, 便知结论成立.

(iv) 因 $B = A \oplus C$, 故得两个正合列

$$
0 \to A \to B \to C \to 0, \qquad (3)
$$

$$
0 \to C \to B \to A \to 0. \qquad (4)
$$

由结论(i) 和(iii), 得 $\lambda(B) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(A), \lambda(C)\}$ 和 $\lambda(A) \geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(B),$

$\lambda(C)-1\}$. 若 $\lambda(B)=\mathrm{Inf}\{\lambda(B),\lambda(C)-1\}$,则 $\lambda(B)<\lambda(C)$ 和 $\lambda(A)\geqslant\lambda(B)$. 因此 $\lambda(B)\leqslant\mathrm{Inf}\{\lambda(A),\lambda(C)\}$. 故 $\lambda(B)=\mathrm{Inf}\{\lambda(A),\lambda(C)\}$. 若 $\lambda(C)-1=\mathrm{Inf}\{\lambda(B),\lambda(C)-1\}$,则 $\lambda(B)\geqslant\lambda(C)-1$ 和 $\lambda(A)\geqslant\lambda(C)-1$. 另外,由结论(ii),又得

$$\lambda(C)\geqslant\mathrm{Inf}\{\lambda(B),\lambda(A)+1\},$$
$$\lambda(A)\geqslant\mathrm{Inf}\{\lambda(B),\lambda(C)+1\}.$$

因此,必有 $\lambda(A)\geqslant\lambda(B)$ 和 $\lambda(C)\geqslant\lambda(B)$. 故 $\lambda(B)=\mathrm{Inf}\{\lambda(A),\lambda(C)\}$.

推论 1.3.2 设 A 是左 Λ-模,B_1 和 B_2 是 A 的两个 f.p. 的子模. 则 B_1+B_2 是 f.p. 的当且仅当 $B_1\cap B_2$ 是 f.g. 的.

证明 考虑正合列

$$0\to B_1\cap B_2\to B_1\oplus B_2\to B_1+B_2\to 0.$$

由定理 1.3.1(iv),得 $\lambda(B_1\oplus B_2)=\mathrm{In}f\{\lambda(B_1),\lambda(B_2)\}\geqslant 1$. 又由定理 1.3.1(ii) 和(iii),得

$$\lambda(B_1+B_2)\geqslant\mathrm{In}f\{\lambda(B_1\oplus B_2),\lambda(B_1\cap B_2)+1\},$$
$$\lambda(B_1\cap B_2)\geqslant\mathrm{Inf}\{\lambda(B_1\oplus B_2),\lambda(B_1+B_2)-1\}.$$

若 B_1+B_2 是 f.p. 的,则 $\lambda(B_1+B_2)\geqslant 1$. 又知 $\lambda(B_1\oplus B_2)\geqslant 1$,故 $\lambda(B_1\cap B_2)>0$. 因此 $B_1\cap B_2$ 是有限生成的. 反过来,因 $B_1\cap B_2$ 是 f.g. 的,故 $\lambda(B_1\cap B_2)\geqslant 0$. 又知 $\lambda(B_1\oplus B_2)\geqslant 1$,故 $\lambda(B_1+B_2)\geqslant 1$. 因此 B_1+B_2 是有限表现的.

定义 设 A 是左 Λ-模,若 A 是 f.g. 的,且 A 的每个 f.g. 子模是 f.p. 的,则称模 A 为凝聚模.

定理 1.3.3 设 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ 是左 Λ-模的正合列.

(i) 若 B 是凝聚模,A 是 f.g. 的,则 C 是凝聚模;

(ii) 若 A 和 C 是凝聚模,则 B 是凝聚模;

(iii) 若 B 和 C 是凝聚模,则 A 是凝聚模.

证明 (i) 因 B 是 f.g. 的,g 是满同态,故 C 是 f.g. 的. 其次,若 C_1 是 C 的 f.g. 子模,则有交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & K_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^{(n)} & \longrightarrow & \Lambda^{(n+m)} & \longrightarrow & \Lambda^{(m)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & g^{-1}(C_1) & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

因 $0\in C_1, A\subseteq g^{-1}(C_1)$，故第三行是正合的. 左边第一个正合列是由 A 为 f. p. 导出的，右边一列是由 C_1 为 f. g. 导出的，这一列也正合，其余行和列皆正合. 因 $g^{-1}(C_1)\subseteq B$，且 $g^{-1}(C_1)$ 是 f. g. 的，B 又是凝聚模，故 $g^{-1}(C_1)$ 是 f. p. 的，因此 K_2 为 f. g. 的. 所以 K_3 为 f. g. 的. 于是知 C_1 为 f. p 的. 从而 C 为凝聚模.

(ii) 由定理 1. 3. 1 得 $\lambda(B)\geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(A),\lambda(C)\}\geqslant 1$. 故 B 是 f. p. 的. 若 B_1 是 B 的 f. g. 子模，考虑交换图(5)，其中行和列皆正合. 因 $g(B_1)$ 是凝聚模 C 的 f. g. 子模，故 $g(B_1)$ 为 f. p. 的. 于是 $\lambda(g(B_1))\geqslant 1$. 又因 B_1 是 f. g. 的，且 $g(B_1)$ 为 f. p. 的，故由命题 1. 2. 3 知 $\operatorname{Ker}(g|B_1)$ 是 f. g.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(g|B_1) & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & g(B_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}
\qquad (5)
$$

的. 而 $\operatorname{Ker}(g|B_1)$ 是凝聚模 A 的子模，故 $\operatorname{Ker}(g|B_1)$ 是 f. p. 的. 因此 $\operatorname{Ker}(g|B_1)\geqslant \mathbf{1}$. 由定理 1. 3. 1，得

$$\lambda(B_1)\geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(\ker(g|B_1),\lambda(g(B_1))\}\geqslant 1.$$

因此 B_1 为 f.p. 的. 故 B 是凝聚模.

(iii) 因 C 是 f.p. 的，且 B 是 f.g. 的，故由命题 1.2.3 知 A 是 f.g. 的. 因此 A 是凝聚模 B 的 f.g. 的子模. 故 A 是凝聚模.

由定理 1.3.3，我们容易得到以下推论.

推论 1.3.4 设 A 和 B 是左 Λ- 凝聚模，$\varphi: A \to B$ 是 Λ- 同态，则 $\ker\varphi$, $\mathrm{Im}\varphi$ 和 $\mathrm{Coker}\varphi$ 是凝聚模.

推论 1.3.5 凝聚模的有限直和是凝聚模.

定义 设 Λ 是环，若 Λ 本身作为左 Λ- 模是凝聚的，则称 Λ 为左凝聚环.

引理 1.3.6 设 $I = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 Λ 的左理想，$a \in I$. 令 $J = I + \Lambda a$，F 是自由左 Λ- 模，$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 是它的基，且 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{f} J \longrightarrow 0$ 正合，这里 $f(x_i) = a_i, \forall\, i \leqslant n$ 和 $f(x_{n+1}) = a$. 若 F' 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的 F 的子模，则存在 Λ- 同态 $g: K \longrightarrow (I:a)$，使得 $0 \longrightarrow K \cap F' \longrightarrow K \xrightarrow{g} (I:a) \longrightarrow 0$ 正合，其中 $(I:a) = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda a \in I\}$.

证明 设 $u \in K$，则 $u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. 因而 $f(u) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0$. 于是 $\lambda_{n+1} \in (I:a)$. 规定 $g: u \mapsto \lambda_{n+1}$，易知 g 是由 K 到 $(I:a)$ 的左 Λ- 同态. 其次，若 $\lambda \in (I:a)$，则 $\lambda a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$. 令 $u = -(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + \lambda x_{n+1}$，则 $f(u) = -\lambda a + \lambda a = 0$. 因此 $u \in K$ 且 $g(u) = \lambda$. 故 g 是满同态. 再者，易知 $\mathrm{Ker} g = K \cap F'$.

定理 1.3.7(Chase) 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左凝聚环；

(ii) 每个 f.p. 左 Λ- 模是凝聚模；

(iii) 每个自由左 Λ- 模的任意 f.g. 子模是 f.p. 的；

(iv) 平坦右 Λ- 模的任意直积是平坦的；

(v) Λ_Λ^T 是平坦模，T 是任意集合；

(vi) 对环 Λ 的任意 f.g. 左理想 I，$(I:a)$ 是 f.g. 的，$\forall\, a \in \Lambda$；

(vii) 对任意 $a \in \Lambda$，$(0:a)$ 是 f.g. 左理想，并且 Λ 中任意两个 f.g.

左理想的交是 f. g. 的.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是 f. p. 左 Λ- 模,于是得正合列 $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$,其中 F_1, F_0 是 f. g. 自由模. 因 Λ 是凝聚环,故由推论 1. 3. 5 知,F_1 和 F_0 是凝聚模. 又因 $A = \mathrm{Coker}\alpha = F_0/\mathrm{Im}\alpha$,$F_0$ 是凝聚模且 $\mathrm{Im}\alpha$ 是 f. g. 的,故由定理 1. 3. 3 知 A 是凝聚模.

(ii)⇒(iii) 设 A 是自由左 Λ- 模 F 的 f. g. 子模,显然,必存在 F 的一个 f. g. 子模 F_0,F_0 是自由的,使得 $A \subseteq F_0$. 因 F_0 是 f. p. 的,故由(ii)知 F_0 为凝聚模. 所以它的 f. g. 子模 A 是 f. p. 的 .

(iii)⇒(i) 这是显然成立的.

(i)⇒(iv) 首先,证明右 Λ- 模 $(\Lambda_\Lambda^{(S)})^T$ 是平坦模,这里 S 和 T 是任意集合. 设 $x_j \in (\Lambda_\Lambda^{(S)})^T$ 和 $\lambda_j \in \Lambda$,使得 $\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j = 0$. 考虑 Λ- 满同态 $f: F \to \sum_{j=1}^n \Lambda\lambda_j$,这里 F 是以 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为基的自由左 Λ- 模,$f(e_j) = \lambda_j, \forall\ j$. 令 $K = \mathrm{Ker}f$,因 $\sum_{j=1}^n \Lambda\lambda_j$ 是环 Λ 的 f. g. 左理想,由(i)知 $\sum_{j=1}^n \Lambda\lambda j$ 是 f. p. 的. 故 K 是 f. g. 的. 于是得 $K = \sum_{i=1}^m \Lambda k_i, k_i \in K \subseteq F$. 因 $k_i \in F$,故存在 $\mu_{ij} \in \Lambda$,使得 $k_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}e_j$,且 $0 = f(k_i) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\lambda_j, 1 \leqslant i \leqslant m$.

其次,因 $x_j \in (\Lambda_\Lambda^{(S)})^T$,故对任意 $\alpha \in T, \beta \in S$,必有 $[x_j(\alpha)](\beta) \in \Lambda$. 由 $\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j = 0$ 知,$\sum_{j=1}^n [x_j(\alpha)](\beta)\lambda_j = 0$.

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^n [x_j(\alpha)](\beta)e_j \in K = \sum_{i=1}^m \Lambda k_i.$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^n [x_j(\alpha)](\beta)e_j = \sum_{i=1}^m a_{i\alpha\beta}k_i,$$

这里 $a_{i\alpha\beta} \in \Lambda$. 规定 $y_i \in (\Lambda_\Lambda^{(S)})^T$,使得

$$[y_i(\alpha)](\beta) = a_{i\alpha\beta}, \forall\ \alpha \in T, \beta \in S, 1 \leqslant i \leqslant m.$$

$$\begin{aligned} \because \quad \sum_{j=1}^n [x_j(\alpha)](\beta)e_j &= \sum_{i=1}^m a_{i\alpha\beta}k_i = \sum_{i=1}^m [y_i(\alpha)](\beta)k_i \\ &= \sum_{i=1}^m [y_i(\alpha)](\beta)\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ij}e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m [y_i(\alpha)](\beta)\mu_{ij}\right)e_j, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_j = \sum_{i=1}^m y_i\mu_{ij}, \forall\ j.$$

由定理 1.2.1 知，$(\Lambda_\Lambda^{(S)})^T$ 是平坦模.

现在，若 $\{U_\alpha | \alpha \in T\}$ 是平坦右 Λ- 模族，则得正合列 $0 \longrightarrow K_\alpha \longrightarrow F_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} U_\alpha \longrightarrow 0$，这里 F_α 是自由模. 因此，又得正合列

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} K_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in T} F_\alpha \xrightarrow{\Pi g_\alpha} \prod_{\alpha \in T} U_\alpha \longrightarrow 0.$$

由上面证明知，$\prod_{\alpha \in T} F_\alpha$ 是平坦模. 设 I 是环 Λ 的任意左理想，则由推论 1.2.2 知，$K_\alpha I = K_\alpha \cap F_\alpha I, \forall\ \alpha$. 于是得

$$\begin{aligned}\left(\prod_{\alpha \in T} K_\alpha\right) I = \prod_{\alpha \in T}(K_\alpha I) &= \prod_{\alpha \in T}(K_\alpha \cap F_\alpha I) \\ &= \left(\prod_{\alpha \in T} K_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha \in T} F_\alpha I\right) \\ &= \left(\prod_{\alpha \in T} K_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha \in T} F_\alpha\right) I.\end{aligned}$$

再由推论 1.2.2 知，$\prod_{\alpha \in T} U_\alpha$ 是平坦模.

(iv)⇒(v)　这是显然成立的.

(v)⇒(i)　设 $I = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是环 Λ 的 f.g. 左理想，于是得正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{f} I \longrightarrow 0$，这里 F 是以 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为基的自由模，$f(e_i) = \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n, K = \mathrm{Ker} f$. 对任意 $k \in K$，因 $K \subseteq F$，故 $k = k_1(k)e_1 + k_2(k)e_2 + \cdots + k_n(k)e_n, k_j(k) \in \Lambda, \forall\ j$. 于是得

$$f(k) = k_1(k)\lambda_1 + k_2(k)\lambda_2 + \cdots + k_n(k)\lambda_n = 0.$$

令 $U = \Lambda_\Lambda^K$，由(v) 知 U 是平坦模. 因此，必有 $x_1, x_2, \cdots x_n \in U$，使得 $x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_n\lambda_n = 0$，这里 $x_j(k) = k_j(k), 1 \leqslant j \leqslant n$. 又由定理 1.2.1 可知，存在 $y_1, y_2, \cdots, y_m \in U$ 和 $\mu_{ij} \in \Lambda (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$，使得

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}\lambda_j = 0, \sum_{i=1}^m y_i \mu_{ij} = x_j, \forall\ i, j.$$

令 $k_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} e_j, 1 \leqslant i \leqslant m$. 因 $f(k_i) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\lambda_j = 0$，故 $k_i \in K$. 现在，证明 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ 是 K 的一个生成集. 任取 $k \in K$，则

$$\begin{aligned}k = \sum_{j=1}^n k_j(k)e_j = \sum_{j=1}^n x_j(k)e_j &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^m y_i\mu_{ij}\right)(k)\right]e_j \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_i(k)\mu_{ij}e_j &= \sum_{i=1}^m y_i(k)k_i,\end{aligned}$$

故 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ 是 K 的一个生成集. 因此 K 是 f.g. 的. 从而知 I 是

f.p. 的. 故 Λ 是凝聚环.

(i)⇒(vi)　设 $I=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是环 Λ 的 f.g. 左理想，$a\in\Lambda$. 仿照引理 1.3.6 证明方法，必得正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\xrightarrow{f}J\longrightarrow 0$，这里 $J=I+\Lambda a$，F 是自由模，$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是它的基，$f(x_i)=a_i$，$\forall\, i\leqslant n$ 和 $f(x_{n-1})=a$. 因 Λ 是凝聚环，故 K 是 f.g. 的. 又由引理 1.3.6，得正合列 $0\to K\cap F'\to K\to(I:a)\to 0$，其中 F' 是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的 F 的子模. 因 $K\cap F'$ 和 K 都是 f.g. 的，故 $(I:a)$ 是 f.g. 的.

(vi)⇒(i)　设 $I=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是环 Λ 的 f.g. 左理想，对 n 作数学归纳法证明 I 是 f.p. 的.

当 $n=1$ 时，必得正合列 $0\longrightarrow(0:a_1)\longrightarrow\Lambda\longrightarrow\Lambda a_1\longrightarrow 0$，$I=\Lambda a_1$. 由(vi) 知 $(0:a_1)$ 是 f.g. 的，故 I 是 f.p. 的. 当 $n>1$ 时，考虑正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\xrightarrow{f}(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})+\Lambda a_n\longrightarrow 0$，这里 F 是 f.g. 自由模，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是它的基，$f(x_i)=a_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 令 $I'=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$，$F'=\Lambda x_1+\Lambda x_2+\cdots+\Lambda x_{n-1}$，$K'=K\cap F'$. 由引理 1.3.6，得正合列 $0\to K'\to K\to(I':a_n)\to 0$. 因序列 $0\to K'\to F'\to I'\to 0$ 正合，且由归纳法假设知 I' 是 f.p. 的，故 K' 是 f.g. 的. 这样，K' 和 $(I':a_n)$ 都是有限生成的，并由定理 1.3.1 知，K 是 f.g. 的. 因此 I 是 f.p. 的. 所以 Λ 是凝聚环.

(i)⇒(vii)　若 $a\in\Lambda$，则得正合列 $0\to(0:a)\to\Lambda\to\Lambda a\to 0$. 因 Λ 是凝聚环，Λa 是 f.p. 的，故 $(0:a)$ 是 f.g. 的.

其次，设 I 和 J 是 Λ 的任意两个 f.g. 左理想，因 $I+J$ 是环 Λ 的 f.g. 左理想，Λ 是凝聚环，故 $I+J$ 是 f.p. 的. 又因 I 和 J 是 f.p. 的，由推论 1.3.2 知 $I\cap J$ 是 f.g. 的.

(vii)⇒(i)　设 $I=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是环 Λ 的 f.g. 左理想，对 n 作数学归纳法证明 I 是 f.p. 的.

当 $n=1$ 时，必得正合列 $0\to(0:a_1)\to\Lambda\to\Lambda a_1\to 0$，$I=\Lambda a_1$. 由(vii) 知 $(0:a_1)$ 是 f.g. 的，故 I 是 f.p. 的. 当 $n>1$ 时，令 $I_1=\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_{n-1}$，$I_2=\Lambda a_n$，由上面证明知 I_2 是 f.p. 的. 并由归纳法假设知 I_1 是 f.p. 的. 又因 $I_1\cap I_2$ 都是 f.g. 的，由推论 1.3.2 知，$I=I_1+$

I_2 是 f. p. 的. 故 Λ 是凝聚环.

1.4 半遗传环、遗传环、Von Neumann 正则环

半遗传环是一类重要的凝聚环,它是由Chase首先证明的. 遗传环和 Von Neumann 正则环是半遗传环.

定义 设 Λ 是环,若 Λ 的每个 f. g. 左理想都是投射模,则称 Λ 为左半遗传环.

类似地可以定义右半遗传环,左半遗传环不一定是右半遗传环.

定理 1.4.1 设 Λ 是左半遗传环,F 是自由左 Λ- 模,则 F 的任意 f. g. 子模都是有限个子模的直和,这些子模都与 Λ 的 f. g. 左理想同构. 因而,左半遗传环上投射模的任意有限生成的子模是投射模.

证明 设 $\{x_i \mid i \in I\}$ 是 F 的基,P 是 F 的 f. g. 子模,$\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ 是 P 的生成集. 由于每个 p_i 是有限个 x_j 的线性组合,因此,可以假设 F 的基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 对 n 作数学归纳法.

当 $n = 1$ 时,$F = \Lambda x_1$. 设 $p_i = \alpha_i x_1, \alpha_i \in \Lambda, i = 1, 2, \cdots, m$. 用 J 表示由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的 Λ 的左理想. 对任意 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \in P$,令 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i$,则 $P \cong J$.

当 $n > 1$ 时,用 F' 表示以 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 为基的自由模,$P' = P \cap F'$. 由归纳法假设知,P' 同构于 Λ 的有限个 f. g. 左理想的直和. 对任取 $p \in P$,则 $p = p' + \lambda x_n$,这里 $p' \in P', \lambda \in \Lambda$. 特别地,令 $p_i = p_i' + \lambda_i x_n$,用 J 表示由 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 生成的 Λ 的左理想. 因 Λ 是左半遗传环,故 J 是投射模. 令 $\pi: P \to J$,使 $p' + \lambda x_n \mapsto \lambda$,则 π 是 Λ- 满同态且 $\mathrm{Ker}\pi = P'$. 考虑正合列

$$0 \to P' \to P \to J \to 0,$$

因 J 是投射模,故 $P \cong P' \oplus J$,即 P 是 Λ 的有限个 f. g. 左理想的直和.

最后,设 P_1 是投射模 P 的 f. g. 子模. 由于 P 是某个自由模的子模,因此 P_1 是某个自由模的 f. g. 子模. 由上面证明知,P_1 是投射模.

定理 1.4.2 设 Λ 是环,则 Λ 是左半遗传的当且仅当任意投射左

Λ- 模的 f.g. 子模是投射模.

证明 若 Λ 是左半遗传环,由定理 1.4.1 知,任意投射左 Λ- 模的 f.g. 子模是投射模.

反过来,因${}_\Lambda\Lambda$是投射模,故它的 f.g. 左理想是投射模. 所以 Λ 是左半遗传环.

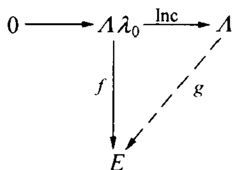
定义 设 Λ 是整环(有单位元,无零因子的交换环),若 Λ 是半遗传环,则称 Λ 为 Prüfer 环.

Prüfer 环与模的挠性质有关.

设 Λ 是整环,A 是一个 Λ- 模,令 $tA = \{a \in A \mid$ 有 $0 \neq \lambda \in \Lambda$,使 $\lambda a = 0\}$. 因 Λ 是整环,故 tA 是 A 的一个子模,把 tA 叫做模 A 的挠子模. 若 $tA = A$,则称 A 为挠模. 若 $tA = 0$,则把 A 叫做无挠模.

定义 设 Λ 是环,A 是左 Λ- 模,$a \in A$,若对任意 $\lambda \in \Lambda$ 且 λ 不是右零因子,皆存在 $a' \in A$,使 $a = \lambda a'$,则称 a 为可除的. 若模 A 的每个元素都是可除的,则称 A 为可除模.

命题 1.4.3 设 Λ 是环,E 是内射左 Λ- 模,则 E 是可除模.



证明 设 $x \in E$,$\lambda_0 \in \Lambda$ 为非右零因子,规定 $f: \Lambda\lambda_0 \to E$,使 $\lambda\lambda_0 \mapsto \lambda x$,$\forall\ \lambda \in \Lambda$. 因 λ_0 非右零因子,故 f 是一个映射. 易知 f 也是 Λ- 同态. 考虑右图,因 E 是内射,故必存在 Λ- 同态 $g: \Lambda \to E$,使得该图是交换的. 因而得 $x = g(\lambda_0) = \lambda_0 g(1)$. 所以 x 是可除的,即 E 是可除模.

命题 1.4.4 设 Λ 是整环,Q 是它的商域. 若 A 是无挠 Λ- 模且 A 是可除的,则 A 是域 Q 上的线性空间.

证明 设 $\dfrac{\alpha}{\beta} \in Q$,$a \in A$,考虑方程 $\beta x = \alpha a$. 因 Λ 是整环且 A 是可除模,故对任意 $0 \neq \beta \in \Lambda$,必有 $A = \beta A$. 于是存在 $b \in A$,使 $\beta b = \alpha a$. 另外,若 $\beta b = \beta b'$,则 $\beta(b - b') = 0$. 因 A 是无挠模且 $\beta \neq 0$,故 $b = b'$. 于是得 $\dfrac{\alpha}{\beta} a = b$. 所以 A 是一个 Q- 模,即 A 是域 Q 上的线性空间.

定理 1.4.5 设 Λ 是整环,则 Λ 是 Prüfer 环当且仅当每个 f.g. 无

挠 Λ- 模是投射模.

证明　若 Λ 是 Prüfer 环,令 A 是任意 f.g. 无挠 Λ- 模,$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是它的生成集. 把 A 嵌入一个内射模 E 中,因 Λ 是整环,故 tE 是 E 的挠子模. 因而商模 $E' = E/tE$ 是无挠模. 又因 E 是内射模,由命题 1.4.3 知 E 是可除模,从而 E' 也是可除模. 令 Q 是整环 Λ 的商域,由命题 1.4.4 知,E' 是域 Q 上一个线性空间.

现在证明 A 是某个投射模的子模. 考虑自然同态 $n_E:E \to E' = E/tE$. 因 $A \subseteq E$ 且 A 是无挠的,故对任意 $0 \neq a \in A$,$n_E(a) \neq 0$. 于是知 $(n_E|A):A \to E'$ 是单同态. 令 $\{e_i | i \in I\}$ 是 E' 在 Q 上的一个基,因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 仅是有限个 e_i 的线性组合,所以 A 可嵌入 E' 的一个 $m(<\infty)$ 维线性子空间 V 中. 令 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是 V 的一个基,则

$$a_j = \sum\nolimits_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{jk}}{\beta_{jk}} v_k.$$

令 β 是所有 β_{jk} 的积,则 $a_j = \sum\nolimits_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(\beta^{-1}v_k)$,这里 $\lambda_{jk} \in \Lambda$. 因 $\beta^{-1}v_1,\beta^{-1}v_2,\cdots,\beta^{-1}v_m$ 是 Q- 线性无关的,故 $\beta^{-1}v_1,\beta^{-1}v_2,\cdots,\beta^{-1}v_m$ 也是 Λ- 线性无关的. 记 F 是由 $\beta^{-1}v_1,\beta^{-1}v_2,\cdots,\beta^{-1}v_m$ 生成的 Λ- 模,则 F 是自由 Λ- 模. 因此,A 是自由 Λ- 模 F 的 f.g. 子模. 而 Λ 是半遗传环,所以 A 是投射模.

反过来,仅需证 Λ 是半遗传环. 设 I 是 Λ 的 f.g. 理想,因 Λ 是整环,故 I 是 f.g. 无挠模. 由假设知 I 是一个投射模,因此 Λ 是半遗传环. 又已知 Λ 是整环,所以 Λ 是一个 prüfer 环.

定理 1.4.6　设 Λ 是 Prüfer 环,A 是 Λ- 模,则 A 是无挠的当且仅当 A 是平坦模.

证明　若 A 是平坦模,对任意 $0 \neq \lambda \in \Lambda$,$0 \neq a \in A$,如果 $\lambda a = 0$,考虑正合列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0,$$

其中 F 是自由 Λ- 模. 令 $I = (\lambda)$,因 F,A 是平坦模,由推论 1.2.2 知,$CI = C \cap FI$. 因 π 是满射,必存在 $x \in F$,使 $\pi(x) = a$. 于是得 $\pi(\lambda x) = \lambda a = 0$,即 $\lambda x \in C$. 又知 $\lambda x \in IF = FI$,故 $\lambda x \in C \cap FI = CI$. 因而得

$\lambda x = \lambda c, c \in C$. 于是又有 $\lambda(x-c)=0$. 但是 $x-c \in F$ 且 F 是自由模，所以 $x-c=0$，即 $x=c\in C$. 这样，$a=\pi(x)=\pi(c)=0$. 这与 $a\neq 0$ 相矛盾，所以 A 是无挠模.

反过来，若 A 是无挠模，则 A 的任意 f.g. 子模 B 是无挠模. 又已知 Λ 是 prüfer 环，由定理 1.4.5 知，B 也是投射模. 因模 A 的每个 f.g. 子模是平坦模，而 A 是它的 f.g. 子模的正向极限，故 A 也是平坦模.

定义 设 Λ 是整环，Q 是它的商域，I 是 Λ 的一个理想. 若存在 a_1，$a_2,\cdots,a_n\in\Lambda$ 和 $q_1,q_2,\cdots,q_n\in Q$，使得 $q_iI\subseteq\Lambda(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$a_1q_1+a_2q_2+\cdots+a_nq_n=1,$$

则称 I 为可逆理想.

设 Λ 是整环，Q 是它的商域，I 是 Λ 的一个非零理想. 容易证明：I 是可逆理想当且仅当 I 是一个投射模.

定义 设 Λ 是整环，若 Λ 的每个 f.g. 理想都是主理想，则称 Λ 为 Bèzout 环

命题 1.4.7 设 Λ 是 Bèzout 环，则 Λ 是 Prüfer 环.

证明 设 I 是 Λ 的任意 f.g. 理想，Q 是 Λ 的商域，因 Λ 是 Bèzout 环，故 $I=(a)$. 而 $I^{-1}=\{x\in Q\mid xI\subset\Lambda\}$，且 $a^{-1}\in I^{-1}$，故 $I^{-1}I=\Lambda$，即 I 是可逆理想，因此它是投射模. 所以，Λ 是 Prüfer 环.

定义 设 Λ 是环，若 Λ 的每个左理想都是投射模，则称 Λ 为左遗传环.

引理 1.4.8 设 Λ 是环，P 是左 Λ-模，则 P 是投射模当且仅当对任意内射左 Λ-模 E 和任意的图(1)，其中行是正合的，必存在 Λ-同态 f：$P\to E$，使图(1)是交换的，即 $\pi f=\sigma$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & {\scriptstyle f}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \\ E & \xrightarrow{\pi} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (1)$$

证明 若 P 是投射模，由定理 1.1.1 知，必存在 Λ-同态 f：$P\to E$，使图(1)是交换的.

反过来，考虑任意的图(2)，其中行正合. 把模 A 嵌入一个内射

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & {\scriptstyle g}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \\ A & \xrightarrow{\pi_1} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

模 E 中，令 $\eta: A \to E$ 是嵌入映射. 记 $A'' = \mathrm{Ker}\pi_1$，则 $A' \cong A/A$. 又记

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & P & & & \\ & & & & {\scriptstyle g}\swarrow & {\scriptstyle f}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1_{A''}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3}$$

$E' = E/A''$，于是得交换图(3)，其中行皆正合，η_1 是相应的嵌入映射. 由已知条件可知：存在 Λ- 同态 $f: P \to E$，使得 $\pi f = \eta_1\sigma_1$. 但是，对任意 $p \in P$，$\eta_1\sigma_1(p) \in A' \subseteq E'$，即 $\pi f(p) \in A'$，故 $f(p) \in A \subseteq E$. 规定 g: $P \to A$，使 $g(p) = f(p)$，则 g 是 Λ- 同态，并且适合 $\pi_1 g = \sigma_1$. 所以 P 是投射模.

对偶地，有以下引理.

引理 1.4.9 设 Λ 是环，E 是左 Λ-模，则 E 是内射模当且仅当对任意投射左 Λ- 模 P 和任意的图(4)，其中行是正合的，必存在 Λ- 同态 $\bar{f}: P \to E$，使图(4)是交换的，即 $\bar{f}\sigma = f$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\sigma} & P \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ & & E & & \end{array} \tag{4}$$

引理 1.4.9 的证明与引理 1.4.8 是类似的，只须把每一步换成对偶形式，故从略.

定理 1.4.10(Cartan-Eilenberg) 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左遗传环；

(ii) 任意投射左 Λ- 模的子模是投射的；

(iii) 任意内射左 Λ- 模的商模是内射的.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\sigma} & \Lambda \\ & & & & \\ E & \xrightarrow{\pi} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (5)$$

证明 (i)⇒(iii) 设 E 是内射模，考虑图(5)，其中行皆正合，I 是 Λ 的任意左理想. 因 Λ 是左遗传环，故 I 是投射模. 由定理 1.1.1 知，存在 Λ- 同态 $g:I\to E$，使得 $\pi g=f$. 又因 E 是内射模，Λ 是投射模，故由引理 1.4.9 知，存在 Λ- 同态 $\bar{g}:\Lambda\to E$，使得 $\bar{g}\sigma=g$. 规定 $\bar{f}:\Lambda\to E'$，使 $x\mapsto\pi\bar{g}(x)$，$\forall\ x\in\Lambda$，则 $\bar{f}$ 是 Λ- 同态，并且 $\bar{f}\sigma(x)=(\pi\bar{g})\sigma(x)=\pi(\bar{g}\sigma)(x)=\pi g(x)=f(x)$，$\forall\ x\in I$. 由 Baer 准则知，$E'$ 是内射模.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\rho} & P \\ & & & & \\ E & \xrightarrow{\pi} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (6)$$

(iii)⇒(ii) 设 P 是投射模，P' 是 P 的任意子模，考虑图(6)，其中行皆正合，E 是内射模. 由(iii) 知 E' 也是内射模. 又由定理 1.1.4 知，存在 Λ- 同态 $\eta:P\to E'$，使得 $\sigma=\eta\rho$. 但 P 是投射模，由定理 1.1.1，则存在 Λ- 同态 $f:P\to E$，使得 $\eta=\pi f$. 规定 $\bar{\sigma}:P'\to E$，使 $x\mapsto f\rho(x)$，$\forall\ x\in P'$，则 $\bar{\sigma}$ 是 Λ- 同态，并且 $\pi\bar{\sigma}=\sigma$. 又由引理 1.4.8 知，P' 是投射模.

(ii)⇒(i) 因 ${}_\Lambda\Lambda$ 是投射模，由(ii) 知，Λ 的每个左理想也是投射模. 故 Λ 是左遗传环.

定理 1.4.11(Kaplansky) 设 Λ 是左遗传环，则任意自由左 Λ- 模的子模同构于 Λ 的左理想的直和.

证明 设 F 是任意自由左 Λ- 模，$\{x_i\mid i\in I\}$ 是它的基，I 是一个良序集，记其序为 $\leqslant$. 令 A 是 F 的任意子模，记 $A_i=A\cap F_i$，$\overline{A}_i=A\cap\overline{F}_i$，其中 $F_i=\bigoplus_{w<i}\Lambda x_w$，$\overline{F}_i=\bigoplus_{w\leqslant i}\Lambda x_w$. 任取 $a\in\overline{A}_i$，则 $a=b+\lambda x_i$，这里 $b\in F_i$，$\lambda\in\Lambda$. 令 $L_i=\{\lambda\in\Lambda\mid\exists\ a\in\overline{A}_i，且\ a=b+\lambda x_i\}$. 易知 L_i 是 Λ 的左理想. 规定 $\sigma:\overline{A}_i\to L_i$，使 $a\mapsto\lambda$，这里 $a=b+\lambda x_i\in\overline{A}_i$，则 σ 是左

Λ- 满同态，且 $\mathrm{Ker}\sigma = A_i$. 于是得正合列

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow \overline{A}_i \xrightarrow{\sigma} L_i \longrightarrow 0.$$

因 Λ 是遗传环，故 L_i 是投射模. 因此这个正合列是分裂的. 于是存在 $\overline{A}_i$ 的子模 C_i，使得

$$\overline{A}_i = A_i \oplus C_i, \quad C_i \cong L_i.$$

我们要证 $A = \oplus_{i \in I} C_i$.

任取 $a \in A \subseteq F$，因 $F = \bigcup_{i \in I} \overline{F}_i$，故存在 $i \in I$ 使 $a \in \overline{F}_i$. 对 A 中固定元素 x，由于 I 是良序集，因此集合 $\{i \mid x \in \overline{F}_i\}$ 有一个最小元素，记为 $\mu(x)$. 若 $\sum_{i \in I} C_i \subseteq A$，则

$$B = \{a \in A \mid a \notin \sum_{i \in I} C_i\} \neq \Phi.$$

令 j 是 $\{\mu(a) \mid a \in B\}$ 中最小的，设 $x \in B$ 使 $\mu(x) = j$，于是得

$$x \in A \cap \overline{F}_j = \overline{A}_j = A_j \oplus C_j.$$

所以 $x = b + c$，这里 $b \in A_j = A \cap F_j, c \in C_j$. 于是 $b = x - c \in A$. 但 $b \notin \sum_{i \in I} C_i$，否则 $x \in \sum_{i \in I} C_i$，与 $x \in B$ 相矛盾. 这样，$b \in A \cap F_j = A \cap \overline{F}_{j-1}$. 故 $\mu(b) < j$. 与 j 的最小性相矛盾，于是得 $A = \sum_{i \in I} C_i$.

再证表达式的唯一性.

若 $c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_n} = 0$, $c_{i_t} \in C_{i_t}$，且 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，则

$$(c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_{n-1}}) + c_{i_n} \in A_{i_n} \oplus C_{i_n}.$$

于是 $\qquad c_{i_n} = -(c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_{n-1}}) \in A_{i_n} \cap c_{i_n} = 0.$

由归纳假设即得 $c_{i_1} = c_{i_2} = \cdots = c_{i_n} = 0$.

综合以上讨论知，$A = \oplus_{i \in I} C_i$，C_i 同构于 Λ 的左理想，$\forall\, i$.

定义 设 Λ 是整环，若 Λ 是遗传环，则称 Λ 为 Dedekind 环.

定理 1.4.12 设 Λ 是整环，则 Λ 是 Dedekind 环当且仅当 Λ 的每个理想是可逆的.

证明 若 Λ 是 Dedekind 环，则 Λ 是遗传环. 因此它的每个理想是投射模. 又 Λ 是整环，故 Λ 的每个理想是可逆的.

反过来，因 Λ 是整环，如果它的每个理想是可逆的，那么 Λ 的每个理想也是投射模，故 Λ 是遗传环.

设 Λ 是整环，则 Λ 的每个可逆理想是 f. g.. 因而，若 Λ 是 Dedekind 环，则 Λ 必是 Noether 环.

定义 设 Λ 是环，若对任意 $\lambda \in \Lambda$，存在 $\lambda' \in \Lambda$ 使 $\lambda\lambda'\lambda = \lambda$，则称 Λ 为 Von Neumann 正则环，简称为 VN 正则环.

定理 1.4.13 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 VN 正则环；

(ii) 每个左(右)Λ- 模皆是平坦模；

(iii) 每个左(右)主理想都是由一个幂等元生成；

(iv) 每个 f. g. 左(右)理想都是主理想，因而由一个幂等元生成.

证明 (i)⇒(iii) 我们只证左主理想，右主理想的证明是类似的. 设 I 是 Λ 的左主理想，则 $I = \Lambda\lambda, \lambda \in \Lambda$. 因 V 是 VN 正则环，故存在 $\lambda' \in \Lambda$，使得 $\lambda = \lambda\lambda'\lambda$. 于是有 $I = \Lambda\lambda\lambda'\lambda = \Lambda\lambda e$，其中 $e = \lambda'\lambda$. 因 $e^2 = (\lambda'\lambda)(\lambda'\lambda) = \lambda'(\lambda\lambda'\lambda) = \lambda'\lambda = e$，故 e 是幂等元. 另外，$e \in I$，故 $\Lambda e \subseteq I$. 又 $e \in \Lambda e$，则 $I = \Lambda\lambda e \subseteq \Lambda e$. 所以 $I = \Lambda e$.

(iii)⇒(iv) 设 I 是 Λ 的 f. g. 左理想，由归纳法知，我们可以假设 I 是由两个元素 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ 生成的，则 $I = \Lambda\lambda_1 + \Lambda\lambda_2$. 由(iii)知，存在幂等元素 e，使得 $\Lambda\lambda_1 = \Lambda e$. 因此 $I = \Lambda e + \Lambda\lambda_2(1-e)$. 又由(iii)知，$\Lambda\lambda_2(1-e) = \Lambda e'$，$e'$ 是幂等元. 故 $I = \Lambda e + \Lambda e'$. 令 $e'' = (1-e)e'$，现在证 $e + e''$ 适合我们的要求.

由于 $e''^2 = (1-e)e'(1-e)e' = (e' - ee' - e'e + ee'e)e'$

$$= e' - ee' = (1-e)e' = e'',$$

因此 e'' 是幂等元.

又 $(e+e'')^2 = (e+e'')(e+e'') = e^2 + e''^2 + ee'' + e''e = e + e''$，

故 $e + e''$ 也是幂等元.

由于 $e, e' \in I$，因此 $e'' = (1-e)e' \in I$. 故 $e + e'' \in I$. 于是得 $\Lambda(e+e'') \subseteq I$.

$$\because \quad e' = e'^2 = e'^2 - e'ee' = e'(1-e)e' = e'e'',$$

$$\therefore \quad e'(e+e'') = e'e + e'e'' = e' \in \Lambda(e+e''),$$

并且 $\quad e(e+e'') = e^2 + ee'' = e^2 = e \in \Lambda(e+e'')$.

于是 $\quad I = \Lambda e + \Lambda e' \subseteq \Lambda(e+e'')$.

综合以上讨论，得 $I = \Lambda(e + e'')$.

(iv)⇒(ii)　设 A 是左 Λ- 模，则有正合列 $0 \to B \to F \to A \to 0$，其中 F 是自由模. 令 I 是 Λ 的任意 f.g. 右理想，由(iv) 知，$I = e\Lambda$，e 是幂等元. 故 $IF = eF$. 因而，任取 $b \in IF \cap B$，有 $b = ef$，$f \in F$.

∵　$eb=e^2f=ef=b$，

∴　$b=e(eb)=eb\in eB\subseteq IB$.

于是 $IF\cap B\subseteq IB$. 另外，$IB\subseteq IF$，$IB\subseteq B$，又得 $IB\subseteq IF\cap B$. 所以 $IB=IF\cap B$. 由推论 1.2.2 知，A 是平坦模.

(ii)⇒(i)　设 $\lambda\in\Lambda$，令 $I=\Lambda\lambda$. 由 (ii) 知 Λ 和 Λ/I 皆是平坦模. 因此，$(\lambda\Lambda)I=I\cap(\lambda\Lambda)\Lambda$，即 $\lambda\Lambda\lambda=\Lambda\lambda\cap\lambda\Lambda$. 由于 $\lambda\in\Lambda\lambda\cap\lambda\Lambda$，因此 $\lambda\in\lambda\Lambda\lambda$. 因而存在 $\lambda'\in\Lambda$，使得 $\lambda=\lambda\lambda'\lambda$. 所以 Λ 是 VN 正则环.

下面这个定理参考文献[117].

定义　设 Λ 是环，若每个单左(右)Λ-模是平坦的，则称 Λ 为左(右)SF-环.

定理 1.4.14　设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 VN 正则环；

(ii) Λ 是左 SF-环且每个循环左 Λ-模的任意极大子模是平坦的.

证明　(i)⇒(ii)　由定理 1.4.13 知，结论是显然的.

(ii)⇒(i)　因 Λ 是循环的，由(ii)知 Λ 的每个极大左理想是平坦的. 对于 $\lambda\in\Lambda$ 且 $\lambda\neq0$，若 $\Lambda\lambda=\Lambda$，则存在 $\lambda'\in\Lambda$，使 $\lambda'\lambda=1$. 因此 $\lambda=\lambda\lambda'\lambda$. 若 $\Lambda\lambda\neq\Lambda$，则存在 Λ 的极大左理想 I，使 $\Lambda\lambda\subseteq I$. 因为

$$(\Lambda/\Lambda\lambda)/(I/\Lambda\lambda)\cong\Lambda/I,$$

而 Λ/I 是单纯模，所以 $I/\Lambda\lambda$ 是循环左 Λ-模 $\Lambda/\Lambda\lambda$ 的极大子模. 由(ii)知 $I/\Lambda\lambda$ 是平坦模. 由于 I 是平坦模，且

$$0\to\Lambda\lambda\to I\to I/\Lambda\lambda\to0$$

是正合的，因此根据推论 1.2.2，得

$$\lambda\Lambda\lambda=\lambda\Lambda\Lambda\lambda=\lambda\Lambda I\cap\Lambda\lambda.$$

于是得 $\lambda\Lambda\lambda=\lambda I\cap\Lambda\lambda$. 因 Λ 是左 SF-环，故 Λ/I 是平坦的，且

$$0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to0$$

是正合的. 由推论 1.2.2 得 $\lambda I=I\cap\lambda\Lambda$. 因 $\lambda\in I\cap\lambda\Lambda$，故 $\lambda=\lambda a$，对某个 $a\in I$. 于是知 $\lambda=\lambda a\in\lambda I\cap\Lambda\lambda=\lambda\Lambda\lambda$. 因此 $\lambda=\lambda\lambda'\lambda$，对某个 $\lambda'\in\Lambda$. 所

以 Λ 是 VN 正则环.

最后，我们证 VN 正则环是左半遗传环和右半遗传环.

定理 1.4.15 若 Λ 是 VN 正则环，则 Λ 是左半遗传环和右半遗传环.

证明 我们只证左半遗传性，右半遗传性的证明是类似的.

设 I 是 f.g. 左理想，因 Λ 是 VN 正则环，由定理 1.4.13 知，$I=\Lambda e$，e 是幂等元. 于是得 $\Lambda=\Lambda e\oplus\Lambda(1-e)$. 故 $I=\Lambda e$ 是自由模的直和项. 因此 I 是投射模. 所以 Λ 是左半遗传环.

1.5 半单环

半单环是重要的环类，Wedderburn-Artin 关于半单环的结构定理是环论中经典的结果. 半单环与环、模的分解有着密切联系，本节主要介绍一些基本概念和主要结果，其证明可以参考有关环论和同调代数著作，如 Anderson-Fuller 的著作 [6]，或参考文献 [101]、[105]，这里一般不再给出证明了.

设 A 是左 Λ-模，且 $A=A_1\oplus A_2$，$\mathrm{End}_\Lambda A=\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$，规定 $e_i: A_1\oplus A_2\to A_1\oplus A_2$，使

$$x_1+x_2\mapsto\begin{cases}x_1, i=1,\\ x_2, i=2,\end{cases}$$

则 $e_i\in\mathrm{End}_\Lambda A$ 且 $e_i^2=e_i$.

命题 1.5.1 若 $e\in\mathrm{End}_\Lambda A$ 是幂等元，则 $1-e\in\mathrm{End}_\Lambda A$ 也是幂等元，且 $A=Ae\oplus A(1-e)$.

证明 由 $e^2=e$ 知 $(1-e)^2=1-e$，且 $e(1-e)=(1-e)e=0$. 若 $x\in A$，因 $x=xe+x(1-e)$，则 $A=Ae+A(1-e)$. 若 $xe\in Ae\cap A(1-e)$，则 $xe=y(1-e)$. 于是得

$$xe=xe^2=y(1-e)e=0.$$

故 $A=Ae\oplus A(1-e)$.

推论 1.5.2 若左 Λ-模 $A=A_1\oplus A_2$，则存在唯一的 $e\in\mathrm{End}_\Lambda A$，$e$ 是幂等元，且 $A_1=Ae$，$A_2=A(1-e)$.

定义 设 e_1，$e_2 \in \Lambda$ 是幂等元，若 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$，则称 e_1，e_2 为正交幂等元.

设 $e \in \Lambda$ 是幂等元，若 $e \neq 0$ 且 e 不能表成两个正交非零幂等元的和，则称 e 为本原幂等元.

定义 设 A 是左 Λ-模，若 0 和 A 是 A 的仅有的直和项，则称 A 为不可分模.

推论 1.5.3 设 A 是非零左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是不可分的；

(ii) 0,1 是 $\mathrm{End}_\Lambda A$ 仅有的幂等元；

(iii) 1 是 $\mathrm{End}_\Lambda A$ 的本原幂等元.

命题 1.5.4 设 A 是 Λ-模，$e \in \mathrm{End}_\Lambda A$ 是幂等元，则

$$\varphi:\ e(\mathrm{End}_\Lambda A)e \to \mathrm{End}_\Lambda Ae$$

与

$$\varphi(ese): xe \mapsto xese, \forall\ s \in \mathrm{End}_\Lambda A, x \in A$$

是环同构.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Ae & \xrightarrow{e} & A \\ & & & \searrow^{g} & \downarrow s \\ & & & & Ae \end{array} \qquad (1)$$

证明 易知 φ 是环的单同态. 设 $g \in \mathrm{End}_\Lambda Ae$，因 $e \in \mathrm{End}_\Lambda A$ 是幂等元，由命题 1.5.1，得

$$A = Ae + A(1-e).$$

故 $0 \longrightarrow Ae \xrightarrow{e} A$ 是分裂单同态.

因此，在图(1)中对于 g：$Ae \to Ae$，必存在 Λ-同态 s：$A \to Ae$，使图(1)是交换的，即 $g = se$.

$$\therefore \quad (xe)\varphi(ese) = xese = xeg.$$

故 $ese \in e(\mathrm{End}_\Lambda A)e$，它在 φ 下的象为 g. 所以 φ 是一个同构.

推论 1.5.5 设 A 是左 Λ-模，$e \in \mathrm{End}_\Lambda A$ 是幂等元，则 Ae 是不可分解的(直和项)$\Leftrightarrow e$ 是本原的.

证明 由命题 1.5.4 和推论 1.5.3，便知结论成立.

定义 设 $\{e_i \mid i \in I\}$ 是环 Λ 的幂等元集，若 $e_ie_j = \delta_{ij}e_i (\forall\ i, j)$，则称 $\{e_i \mid i \in I\}$ 为正交的. 这里 $i = j$ 时，$\delta_{ij} = 1$，而 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$.

设 $\{e_1, e_2\cdots, e_n\}$ 是环 Λ 的正交幂等元集. 若 $e_1+e_2+\cdots+e_n=1$，则把 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 叫做完全的.

设 A 是左 Λ-模，且 $A=\oplus_{i\in I}A_i$，由于 $A=A_i\oplus(\sum_{j\neq i}A_j)$，根据推论 1.5.2 知，存在唯一的幂等元 $e_i\in \mathrm{End}_\Lambda A$，使得

$$A=Ae_i\oplus A(1-e_i)\ ,\ Ae_i=A\ ,\ A(1-e_i)=\sum_{j\neq i}A_j\ .$$

我们把 $\{e_i|i\in I\}$ 称为属于直和分解 $A=\oplus_{i\in I}A_i$ 的幂等元集. 反过来，若存在 $\mathrm{End}_\Lambda A$ 的幂等元集 $\{e_i|i\in I\}$，使得 $A_i=Ae_i$，$\sum_{j\neq i}A_j=A(1-e_i)(\forall\ i)$，则 $A=\oplus_{i\in I}A_i$.

命题 1.5.6 设左 Λ-模 $A=\oplus_{i\in I}A_i$，$\{e_i|i\in I\}$ 是属于这个分解的幂等元集，则

(i) $\{e_i|i\in I\}$是正交的；

(ii) 对任意 $x\in A=\oplus_{i\in I}A_i$，$x=\sum^{f}xe_i$，这里 f 表示有限和.

证明 设 e_j，$e_k\in\{e_i|i\in I\}$，$j\neq k$，则

$$A_j\subseteq\sum_{i\neq k}A_i=A(1-e_k)=\mathrm{Ker}e_k,\ A_j=Ae_j\ .$$

$\therefore\quad A_je_k=Ae_je_k=0.$

因此，$e_je_k=0$. 同理，$e_ke_j=0$.

(ii) 设 $x\in A=\oplus_{i\in I}A_i$，则 $x=\sum^{f}a_i$，$a_i\in A_i$.

但 $A_i=Ae_i$，于是得

$$xe_j=\sum^{f}a_ie_j=a_je_j=a_j.$$

所以
$$x=\sum^{f}xe_i.$$

推论 1.5.7 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是左 Λ-模 A 的子模，则 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n\Leftrightarrow$在 $\mathrm{End}_\Lambda A$ 中存在完全、正交幂等元素 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，使 $A_i=Ae_i$，$\forall\ i$.

下面讨论正则模${}_\Lambda\Lambda$、Λ_Λ 和${}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ 的分解. 首先 $\Lambda\cong\mathrm{End}_\Lambda\Lambda\cong\mathrm{End}\Lambda_\Lambda$，我们可以用 Λ 的幂等元来代替 $\mathrm{End}_\Lambda\Lambda$ 或 $\mathrm{End}\Lambda_\Lambda$ 的幂等元. 因此，对应于模的分解得到以下结论.

命题 1.5.8 环 Λ 的左理想 I 是${}_\Lambda\Lambda$ 的直和项⇔存在幂等元 $e\in\Lambda$，使 $I=\Lambda e$. 并且，若 $e\in\Lambda$ 是幂等元，则 $1-e$ 也是幂等元，${}_\Lambda\Lambda=\Lambda e\oplus\Lambda(1-e)$.

命题 1.5.9 设 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 是环 Λ 的左理想，则下列陈述是等价的：

(i) ${}_\Lambda\Lambda=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$；

(ii) 对任意 $x\in\Lambda$，必可唯一地表示为

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n, x_i\in I_i, i=1,2,\cdots,n;$$

(iii) 存在 Λ 的完全、正交、幂等元集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，使 $I_i=\Lambda e_i$，$i=1, 2, \cdots, n$.

推论 1.5.10 设 e 是环 Λ 的非零幂等元，则下列陈述是等价的：

(i) e 是本原幂等元；

(ii) Λe 是 Λ 的本原左理想(即 Λe 是 Λ 的左理想且 e 是本原幂等元)；

(iii) $e\Lambda$ 是 Λ 的本原右理想；

(iv) Λe 是${}_\Lambda\Lambda$ 的不可分解的直和项；

(v) $e\Lambda$ 是 Λ_Λ 的不可分解的直和项；

(vi) 环 $e\Lambda e$ 仅有一个非零幂等元 e.

推论 1.5.11 若$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是环 Λ 的完全、正交、幂等元集，则

$${}_\Lambda\Lambda=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_n, \Lambda_\Lambda=e_1\Lambda\oplus e_2\Lambda\oplus\cdots\oplus e_n\Lambda.$$

推论 1.5.12 设 Λ 是环，则左正则模${}_\Lambda\Lambda$ 是本原左理想的直和${}_\Lambda\Lambda=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$⇔存在 Λ 的完全、正交、本原幂等元集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，使 $I_i=\Lambda e_i$，$i=1, 2, \cdots, n$.

定义 设 $e\in\Lambda$ 是幂等元，若对任意 $\lambda\in\Lambda$，皆有 $\lambda e=e\lambda$，则称 e 为 Λ 的中心幂等元.

设 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 Λ 的理想，若

$${}_\Lambda\Lambda=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n,$$

则称 Λ 是理想 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的直和，而把 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 叫做环 Λ 的直和项，记作

$$\Lambda = I \dot{+} I_2 \dot{+} \cdots \dot{+} I_n.$$

并且，把这个分解叫做 Λ 的环分解.

显然，若 $\Lambda = I \dot{+} I_2 \dot{+} \cdots \dot{+} I_n$ 时，则

$$\Lambda_\Lambda = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n, \ {}_\Lambda\Lambda_\Lambda = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

命题 1.5.13 设 I_1，I_2，…，I_n 是环 Λ 的非零理想，则下列陈述是等价的：

(i) $\Lambda = I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \cdots \dot{+} I_n$；

(ii) ${}_\Lambda\Lambda = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$；

(iii) 存在 Λ 的完全、正交、中心幂等元集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，使 $I_i = \Lambda u_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

环 Λ 称为不可分的，如果它没有项数多于 1 的环的分解.

推论 1.5.14 环 Λ 是不可分的$\Leftrightarrow$1 是 Λ 的唯一的非零中心幂等元.

命题 1.5.15 设 I 是环 Λ 的真理想，若 e 是 Λ 的(中心)幂等元，则 $e+I$ 是商环 Λ/I 的(中心)幂等元，并且，作为左 Λ-模和左 Λ/I-模必有

$$(\Lambda/I)(e+I) = (\Lambda e + I)/I \cong \Lambda e/Ie. \tag{2}$$

特别地，若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 Λ 的完全、正交、幂等元集，则 $\{e_1+I, e_2+I, \cdots, e_n+I\}$ 是商环 Λ/I 的正交、幂等元集，且作为左 Λ-模和左 Λ/I-模必有

$$\Lambda/I \cong \Lambda e_1/Ie_1 \oplus \Lambda e_2/Ie_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda e_n/Ie_n. \tag{3}$$

证明 仅需证明(2)式的后面的同构关系.

由于 e 是幂等元，因此得

$$\Lambda e \cap I = \{\lambda e \in \Lambda e \mid \lambda e \in I\} \subseteq Ie.$$

易知 $\Lambda e \cap I = Ie$. 于是

$$(\Lambda e + I)/I \cong \Lambda e/(\Lambda e \cap I) = \Lambda e/Ie.$$

(3)式由 $\Lambda \to \Lambda/I$ 为满同态及(2)式可直接得到.

现在，我们讨论半单环.

定义 设 A 是左 Λ-模且 $A\neq 0$，若 A 除零模和它本身外无其它子模，则称 A 为单纯模.

设 A 是左 Λ-模，若 $A=\bigoplus_{i\in I}A_i$，这里 A_i 是单纯模($\forall i$)，则称 A 为半单纯模.

显然，单纯模是不可分的，而半单纯模具有不可分的分解.

定义 设 Λ 是环，若 ${}_\Lambda\Lambda$ 是半单纯模，则称 Λ 为半单环.

关于单纯模，由定义可直接得到下面引理：

引理 1.5.16(**Schur**) 设 A 是左 Λ-单纯模，B 是任意左 Λ-模，那么必有以下结论：

(i) 若 σ：$A\to B$ 是 Λ-同态，则 σ 或者是零同态或者是单同态；

(ii) 若 τ：$B\to A$ 是 Λ-同态，则 τ 或者是零同态或者是满同态；

(iii) 若 f：$A\to A$ 是 Λ-同态，则 f 或者是零同态或者是同构.

定理 1.5.17 设 A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是半单纯的；

(ii) A 是一些单纯子模的和；

(iii) A 是它的所有单纯子模的和；

(iv) 对于 A 的任意子模 B，必有一个子模 C，使得 $A=B\oplus C$.

定理 1.5.18(**半单环的结构定理**) 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) 每个左 Λ-模都是投射模；

(ii) 每个左 Λ-模都是内射模；

(iii) 每个左 Λ-模的短正合列都是分裂的；

(iv) 每个非零左 Λ-模都是半单纯的；

(v) 环 Λ 是有限个单纯左理想的直和 $\Lambda=\bigoplus_{i=1}^{n}L_i$，其中每个 L_i 是单纯左理想，且 $L_i=\Lambda e_i$，而 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ 是完全、正交、本原、幂等元集；

(vi) $\Lambda=\bigoplus_{j=1}\Lambda_j$，其中每个 Λ_j 为环 Λ 的双边理想，而且与某个除环 $\triangle_j$ 上 $n_j\times n_j$ 全矩阵环同构；

(vii) Λ 没有非零的幂零左理想，并且是左 Artin 环.

1.6 局部环和半局部环

局部环是由 Krull [53] 于 1938 年引入的，局部环的理论在代数几何中有其重要的应用，也是环论的一个主要研究对象. 半局部环是比局部环更广泛的环类，它是由 Chevalley [19] 于 1943 年引入的. 本节首先介绍模的基座和根，以及环的 Jacobson 根，然后讨论局部环和半局部环.

定义 设 A 是左 Λ-模，则把 $\mathrm{Soc}A=\sum\{B\subseteq A\mid B$ 是 A 的极小子模$\}$ 叫做 A 的基座.

若 B 是 A 的极小子模，则 B 是单纯模. 因此，$\mathrm{Soc}A$ 是半单纯模. 于是得

$$A \text{ 是半单纯的} \Leftrightarrow A=\mathrm{Soc}A.$$

命题 1.6.1 设 A 是左 Λ 模，则 $\mathrm{Soc}A=\bigcap\ \{C\subseteq A\mid C\trianglelefteq A\}$.

证明 设 B 是 A 的任意单纯子模，C 是 A 的任意本质子模，则 $B\cap C\neq 0$. 因此 $B\cap C=B$. 于是得 $\mathrm{Soc}A\subseteq C$. 另外，令 $H=\bigcap\{C\subseteq A\mid C\trianglelefteq A\}$，设 N 是 H 的子模，由 Zorn 引理知，A 的所有与 N 的交为零的子模组成的集合中必有一个极大元 N'. 则 $N+N'=N\oplus N'\trianglelefteq A$. 于是 $N\subseteq H\subseteq N\oplus N'$. 所以

$$H=H\cap(N\oplus N')=N\oplus(H\cap N'),$$

即 H 的任意子模都是 H 的直和项. 由定理 1.5.16 知，H 是半单纯的. 因此 $H\subseteq\mathrm{Soc}A$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{Soc}A=\bigcap\{C\subseteq A\mid C\trianglelefteq A\}$.

定义 设 A 是左 Λ-模，则把 $\mathrm{Rad}A=\bigcap\{B\subseteq A\mid B$ 是 A 的极大子模$\}$ 叫做 A 的根.

命题 1.6.2 设 A 是左 Λ-模，则 $\mathrm{Rad}A=\sum\{C\subseteq A\mid C\ll A\}$.

证明 设 C 是 A 的任意多余子模，B 是 A 的一个极大子模. 若 $C\nsubseteq B$，则 $B+C=A$. 但 $C\ll A$，故 $B=A$，这与 B 是 A 的真子模矛盾. 因此 $C\subseteq B$. 于是 $C\subseteq\mathrm{Rad}A$. 另外，对任意 $x\in\mathrm{Rad}A$，若有 A 的真子模 C，使 $\Lambda x+C=A$，则 $x\notin C$. 因而必存在 A 的一个极大子模 B，使

$C\subseteq B$ 且 $x\notin B$. 这与 $x\in \mathrm{Rad}A=\bigcap\{B\subseteq A\mid B$ 是 A 的极大子模$\}$ 相矛盾. 因此 $\Lambda x\ll A$. 所以 $\mathrm{Rad}A=\sum\{C\subseteq A\mid C\ll A\}$.

定理 1.6.3(**Kertese**) 设 A 是左 Λ-模,则 A 是半单纯的$\Leftrightarrow \mathrm{Rad}A=0$ 且 A 的循环子模满足降链条件.

证明 若 A 是半单纯的,且 C 是 A 的任意多余子模,由定理 1.5.16 得 $A=C\oplus B$. 但 $C\ll A$,故 $B=A$. 因此 $C=0$. 由命题 1.6.2 得 $\mathrm{Rad}A=0$. 其次,设

$$\Lambda a_1\supseteq \Lambda a_2\supseteq\cdots \tag{1}$$

是 A 的循环子模降链. 因 $A=\oplus_{i\in I}A_i$, A_i 是单纯模($\forall\ i$),故 a_1 可以表示为

$$a_1=b_{i_1}+b_{i_2}+\cdots+b_{i_n},\quad b_{i_j}\in A_{i_j},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

因此
$$\Lambda a_1\subseteq A_{i_1}\oplus A_{i_2}\oplus\cdots\oplus A_{i_n}.$$

因 A_{i_j} 是单纯模,故 A_{i_j} 为 Artin 模. 所以 $A_{i_1}\oplus A_{i_2}\oplus\cdots\oplus A_{i_n}$ 是 Artin 模. 这样,子模降链(1)是 Artin 模的子模降链,必存在一个正整数 m,使得 $\Lambda a_n=\Lambda a_m$, $\forall\ n\geqslant m$.

反过来,首先有 $A=\sum_{a\in A}\Lambda a$, Λa 是 A 的非多余子模.

对任意 $a\in A$,若 Λa 不是单纯模,则存在 $b_1\in\Lambda a$ 且 $\Lambda b_1\neq 0$. 由于 A 的循环子模满足降链条件,因此可以取 b_1 使 Λb_1 是极小的. 故 Λb_1 是单纯模. 因 $\mathrm{Rad}A=\sum\{C\subseteq A\mid C\ll A\}=0$,故 Λb_1 是 A 的非多余子模. 从而 Λb_1 也是 Λa 的非多余子模. 因此,存在 Λa 的一个真子模 B,且 $B\neq 0$,使 $\Lambda b_1+B=\Lambda a$. 于是得 $a=\lambda b_1+a_1$,这里 $\lambda\in\Lambda$, $a_1\in B$. 因而 $\Lambda a=\Lambda b_1+\Lambda a_1$,且 $0\neq\lambda a_1\subset\Lambda a$.

若 Λa_1 不是单纯模,则继续以上做法,便有

$$\Lambda a_1=\Lambda b_2+\Lambda a_2,\ \Lambda a_2 \text{ 是单纯模},\ 0\neq\Lambda a_2\subset\Lambda a_1.$$

这样继续下去,就得到 A 的循环子模降链

$$\Lambda a\supseteq\Lambda a_1\supseteq\Lambda a_2\supseteq\cdots.$$

由已知条件可知,存在正整数 n,使

$$\Lambda a_n=\Lambda a_{n+1}=\cdots.$$

于是得

$$\Lambda a=\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_n,$$

这里每个 Λa_i 是单纯模. 故 Λa 是半单纯模. 因此, $A=\sum_{a\in A}\Lambda a$ 是半单纯模.

命题 1.6.4 设 $f:A\to B$ 是左 Λ-同态, 则 $f(\mathrm{Rad}A)\subseteq\mathrm{Rad}B$. 特别地, $\mathrm{Rad}A$ 是 A 的左 Λ-右 $\mathrm{End}_\Lambda A$-子模.

证明 设 A' 是 A 的任意多余子模, 对 B 的任意子模 B', 若 $B=f(A')+B'$, 则对 $a\in A$, 必有 $f(a)=f(a')+b'$, $a'\in A'$, $b'\in B'$. 记 $f^{-}(B')=\{x\in A\,|\,f(x)\in B'\}$, 于是得 $A=A'+f^{-}(B')$. 因 $A'\ll A$, 故 $f^{-}(B')=A$. 于是知 $f(A')\subseteq B'$. 所以 $B'=B$. 因此 $f(A')\ll B$. 由命题 1.6.2, 得 $f(\mathrm{Rad}A)\subseteq\mathrm{Rad}B$.

命题 1.6.5 设 A 是 f.g. 左 Λ-模, 则 $\mathrm{Rad}A\ll A$.

证明 若 B 是 A 的子模, 且 $A=\mathrm{Rad}A+B$, 由命题 1.6.2 知 $\mathrm{Rad}A=\sum\{C\subseteq A\,|\,C\ll A\}$. 于是得

$$A=\sum\{C\subseteq A\,|\,C\ll A\}+B.$$

因 A 是 f.g., 故必存在 A 的有限个多余子模 C_1, C_2, …, C_n, 使

$$A=(C_1+C_2+\cdots+C_n)+B.$$

由于 $C_1+C_2+\cdots+C_n\ll A$, 因此 $B=A$, 即 $\mathrm{Rad}A\ll A$.

定义 设 Λ 是环, 把 $\mathrm{Rad}_\Lambda\Lambda$ 叫做环 Λ 的 Jacobson 根, 记为 $J(\Lambda)$.

由命题 1.6.4 知, $J(\Lambda)$ 是 Λ 的左 Λ-右 $\mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)$-子模. 而 $\Lambda\cong\mathrm{End}({}_\Lambda\Lambda)$, 故 $J(\Lambda)$ 是环 Λ 的左理想, 也是右理想. 因此 $J(\Lambda)$ 是 Λ 的理想.

设 Λ 是环, $x\in\Lambda$, 若 $1-x$ 在 Λ 内有一个左逆元, 则称 x 为左拟正则元. 若 $1-x$ 在 Λ 内有一个右逆元, 则称 x 为右拟正则元.

若 $x\in\Lambda$ 是左拟正则的, 又是右拟正则的, 则称 x 为拟正则的.

若 I 是环 Λ 的左理想, I 中每个元素是左拟正则(拟正则)的, 则称 I 是左拟正则(拟正则)的.

命题 1.6.6 设 I 是环 Λ 的左理想, 则下列陈述是等价的:

(i) I 是左拟正则的;

(ii) I 是拟正则的;

(iii) $I\ll_\Lambda\Lambda$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $x\in I$,由(i)可知,存在 $x'\in\Lambda$,使 $x'(1-x)=1$. 故 $x'=1+x'x=1-(-x'x)$. 因 $-x'x\in I$, 又有 $y\in\Lambda$ 使 $y(1+x'x)=yx'=1$.

$\therefore\quad 1-x=yx'(1-x)=y[x'(1-x)]=y.$

于是得 $1=yx'=(1-x)x'$. 故 x 也是右拟正则的. 因此 I 是拟正则的.

(ii)⇒(iii) 设 I 是环 Λ 的拟正则的左理想, 如果 L 是 Λ 的任意左理想, 且 $\Lambda=I+L$, 因 $1\in\Lambda$, 必存在 $x\in I$, $y\in L$, 使 $1=x+y$. 因 $1-x$ 是拟正则的, 故 $1-x$ 是可逆的. 于是知 $1\in L$. 所以 $L=\Lambda$. 因此 $I\ll_{\Lambda}\Lambda$.

(iii)⇒(i) 对任意 $x\in I$, 因 $\Lambda=\Lambda x+\Lambda(1-x)$, 并且由 $I\ll_{\Lambda}\Lambda$ 知 $\Lambda x\ll_{\Lambda}\Lambda$, 故 $\Lambda=\Lambda(1-x)$. 于是知 $1-x$ 有左逆元,即 x 是左拟正则的. 所以 I 是左拟正则的.

定理 1.6.7 设 Λ 是环, 则 Λ 的以下每个子集都等于 $J(\Lambda)$:

(J_1) Λ 的所有极大左(右)理想的交;

(J_2) $\{x\in\Lambda\mid\lambda xr$ 是拟正则的, $\forall\ \lambda,\ \gamma\in\Lambda\}$;

(J_3) $\{x\in\Lambda\mid\lambda x$ 是拟正则的, $\forall\ \lambda\in\Lambda\}$;

(J_4) $\{x\in\Lambda\mid x\lambda$ 是拟正则的, $\forall\ \lambda\in\Lambda\}$;

(J_5) Λ 的所有拟正则左(右)理想的和;

(J_6) Λ 的所有拟正则理想的和;

(J_7) Λ 的唯一最大多余左(右)理想.

并且(J_2),(J_3),(J_4),(J_5)和(J_6)中用左拟正则或右拟正则代替拟正则后,也等于 $J(\Lambda)$.

证明 设(J_1^*),(J_5^*)和(J_7^*)分别是(J_1),(J_5)和(J_7)中关于"右"的陈述.

由定义知 $J(\Lambda)=J_1$. 又由命题 1.6.2 知 $J(\Lambda)=\{I\subseteq\Lambda\mid I\ll_{\Lambda}\Lambda\}$. 但$_{\Lambda}\Lambda$ 是有限生成的,由命题 1.6.5 知 $J(\Lambda)\ll\Lambda$. 故 $J(\Lambda)$是 Λ 的唯一最大多余左理想,即 $J_1=J(\Lambda)=J_7$. 由命题 1.6.6,得 $J_5=J_7$. 所以

$$J(\Lambda)=J_1=J_5=J_7.$$

同理 $$J_1^*=J_5^*=J_7^*.$$

因 $J_5=J(\Lambda)$,故 J_5 是 Λ 的拟正则理想,$J_5\subseteq J_6$. 另外,$J_6\subseteq J_5$,所以

$J_5=J_6$. 同理，$J_5^*=J_6$，于是得

$$J(\Lambda)=J_1=J_5=J_6=J_7=J_1^*=J_5^*=J_7^*.$$

因 J_5 和 J_5^* 都是 Λ 的理想，故得

$$J_5\subseteq J_2\subseteq J_3\subseteq J_5,$$

和

$$J_5^*\subseteq J_2\subseteq J_4\subseteq J_5^*.$$

$$\therefore\quad J(\Lambda)=J_1=J_2=J_3=J_4=J_5=J_6=J_7=J_1^*=J_5^*=J_7^*.$$

最后，由命题 1.6.6 知，用左拟正则代替拟正则时，必有

$$J_2=J_3=J_5=J_6=J(\Lambda).$$

用右拟正则代替拟正则时，必有

$$J_2=J_4=J_5^*=J_6=J(\Lambda).$$

因此，仅需证用右拟正则代替拟正则时，$J_3=J(\Lambda)$，以及用左拟正则代替拟正则时，$J_4=J(\Lambda)$. 这里仅证明第一种情形，第二种情形是类似的. 用 J_3^γ 表示 J_3 关于右拟正则的陈述，首先，$J(\Lambda)=J_1^*=J_2\subseteq J_3^\gamma$. 若 $x\in J_3^\gamma$ 且 $x\notin J_1^*$，则存在极大右理想 I，使 $x\notin I$. 因此，$\Lambda=x\Lambda+I$. 于是得 $1=x\lambda+y$，$y\in I$. 但 λx 是右拟正则的，必有 $\gamma\in\Lambda$，使 $(1-\lambda x)\gamma=1$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad x&=x(1-\lambda x)\gamma=(x-x\lambda x)\gamma=x\gamma-(x\lambda)(x\gamma)\\&=(1-x\lambda)(x\gamma)=yx\gamma\in I.\end{aligned}$$

这就导出矛盾，因此 $x\in J_1^*$，即 $J_3^\gamma\subseteq J_1^*$. 所以，$J_3^\gamma=J(\Lambda)$.

推论 1.6.8 设 Λ 是环，则 $\mathrm{Rad}({}_\Lambda\Lambda)=J(\Lambda)=\mathrm{Rad}(\Lambda_\Lambda)$.

推论 1.6.9(Nakayama 引理) 设 I 是环 Λ 的左理想，则下列陈述是等价的：

(i) $I\subseteq J(\Lambda)$；

(ii) 对每个 f.g. 左 Λ-模 A，若 $IA=A$，必有 $A=0$；

(iii) 对每个 f.g. 左 Λ-模 A，$IA\ll A$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $A\neq 0$ 是 f.g.，则 A 有极大子模 B. 因此，A/B 是单纯模. 于是存在 Λ 的极大左理想 L，使 $A/B\cong\Lambda/L$. 因 $J(\Lambda)\subseteq L$，故 $J(\Lambda)A\subseteq LA$. 考虑下面交换图(2)，其中 f 是自然同态，$\bar{g}(\lambda+L)=g(\lambda)$，$\forall\ \lambda\in\Lambda$，$\mathrm{Ker}g=L$，且 $\bar{g}$ 是 Λ-同构. 由图(2)得

$$0=(\mathrm{Ker}g)A/B\cong(\mathrm{Ker}f)(\Lambda/L)=L(A/B).$$

故 $LA\subseteq B$. 因此，若 $I\subseteq J(\Lambda)$，则 $IA\subseteq J(\Lambda)A\subseteq B$. 但 B 是 A 的极大子模，故 $IA\neq A$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & A/L & \longrightarrow & 0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{g}} & & \\ A & \xrightarrow{g} & A/B & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (2)$$

(ii)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 左 Λ-模，B 是 A 的任意子模，且 $A=IA+B$.

$$\therefore \quad I(A/B)=(IA+B)/B=A/B.$$

因 A 是 f.g. 的，故 A/B 也是 f.g. 的. 由(ii)得 $A/B=0$，即 $A=B$. 因此 $IA\ll A$.

(iii)⇒(i) 因${}_\Lambda\Lambda$ 是 f.g. 的，由(iii)知 $I\Lambda\ll\Lambda$. 但由定理 1.6.7，$J(\Lambda)$ 是 Λ 的最大多余子模，故 $I\Lambda\subseteq J(\Lambda)$. 于是得 $I\subseteq I\Lambda\subseteq J(\Lambda)$，即 $I\subseteq J(\Lambda)$.

定义 设 Λ 是环，若 $\Lambda/J(\Lambda)$是除环，则称 Λ 为拟局部环.

若 Λ 是交换拟局部的，则把 Λ 叫做局部环.

定理 1.6.10 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是拟局部环；

(ii) Λ 有唯一极大左(右)理想；

(iii) $J(\Lambda)$是极大左(右)理想；

(iv) Λ 的所有无左(右)逆元的元素组成的集合是一个左(右)理想；

(v) $J(\Lambda)=\{x\in\Lambda\mid\Lambda x\neq\Lambda\}=\{x\in\Lambda\mid x\Lambda\neq\Lambda\}$；

(vi) $J(\Lambda)=\{x\in\Lambda\mid x$ 不是可逆元$\}$；

(vii) 若 $x\in\Lambda$，则 x 或 $1-x$ 是可逆的.

证明 对(ii)，(iii)，(iv)和(v)仅讨论关于“左”的陈述，而相应于“右”的陈述，其方法是类似的.

(i)⇒(ii) 考虑自然同态 $n_\Lambda:\Lambda\to\Lambda/J(\Lambda)$，则 Λ 的所有包含$J(\Lambda)$的左理想与 $\Lambda/J(\Lambda)$的所有子模之间有一个可逆格同构. 但$\Lambda/J(\Lambda)$是除环，因此它是一个单纯左-模. 故 $J(\Lambda)$是 Λ 的极大左理想. 又由定理 1.6.7，$J(\Lambda)$是 Λ 的唯一的极大左理想.

(ii)⇒(iii)　由定理 1.6.7 知，结论成立是显然的.

(iii)⇒(iv)　由(iii)和定理 1.6.7 知，$J(\Lambda)$是 Λ 的唯一极大左理想. 设 $x, y\in\Lambda$ 是非左可逆的，则 Λx 和 Λy 是 Λ 的真左理想. 但${}_\Lambda\Lambda$ 是有限生成的，因此 Λx 和 Λy 皆被包含于 Λ 的极大左理想内. 所以 $\Lambda x\subseteq J(\Lambda)$且 $\Lambda y\subseteq J(\Lambda)$. 这样，$x+y\in J(\Lambda)$是非左可逆的. 另外，若 $x\in\Lambda$ 是非左可逆的，对任意 $\lambda\in\Lambda$，因 $x\in J(\Lambda)$，故 $\lambda x\in J(\Lambda)$是非左可逆的.

(iv)⇒(v)　因 $J(\Lambda)$是 Λ 的所有极大左理想的交，故 $J(\Lambda)$是 Λ 的真理想. 因此，若 $x\in J(\Lambda)$，则 $\Lambda x\neq\Lambda$. 另外，若 $x\in\Lambda$ 且 $\Lambda x\neq\Lambda$，则对任意 $\lambda\in\Lambda$，λx 是非左可逆的. 但 $1=\lambda x+(1-\lambda x)$，而 1 是左可逆的，由(iv)知 $1-\lambda x$ 是左可逆的，即 λx 是左拟正则的. 由定理 1.6.7 知，$x\in J(\Lambda)$.

(v)⇒(i)　设 $x+J(\Lambda)\in\Lambda/J(\Lambda)$ 且 $x+J(\Lambda)\neq J(\Lambda)$，则 $x\notin J(\Lambda)$. 由(v)知 $\Lambda x=\Lambda$. 故存在 $\lambda\in\Lambda$ 使 $\lambda x=1$. 于是 $\lambda+J(\Lambda)$是 $x+J(\Lambda)$的左逆元. 故 $\Lambda/J(\Lambda)$是除环.

(i)⇔(vi)　若 $\Lambda/J(\Lambda)$是除环，则 $J(\Lambda)$是 Λ 的真理想. 故$J(\Lambda)$中每个元素是不可逆的. 另外，对任意 $x\in\Lambda$ 且 $x\notin J(\Lambda)$，由(i)知 $x+J(\Lambda)$在 $\Lambda/J(\Lambda)$内可逆. 因此 $\Lambda x+J(\Lambda)=\Lambda$ 和 $x\Lambda+J(\Lambda)=\Lambda$. 再由定理 1.6.7 知，$J(\Lambda)\ll\Lambda$. 于是得 $\Lambda x=\Lambda=x\Lambda$. 故 x 是可逆的. 反过来，设 $x\in\Lambda$ 且 $x\notin J(\Lambda)$，由(vi)知 x 是可逆的. 因此，$x+J(\Lambda)\neq 0$ 在 $\Lambda/J(\Lambda)$内是可逆的. 所以 $\Lambda/J(\Lambda)$是除环.

(vi)⇔(vii)　若(vi)成立，对任意 $x\in\Lambda$ 且 x 是非可逆的，则 $x\in J(\Lambda)$. 又由定理 1.6.7 知，x 是拟正则的. 因此 $1-x$ 是可逆的. 反过来，若 $x\in\Lambda$ 是非可逆的，由(vii)知 $1-\lambda x$ 是可逆的，$\forall\lambda\in\Lambda$，即对任意$\lambda\in\Lambda$，必有 λx 是拟正则的. 根据定理 1.6.7，得 $x\in J(\Lambda)$.

引理 1.6.11　设 Λ 是拟局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模，则 A 必有投射覆盖(P, ψ)，且 P 是含有一个有限基的自由模，$\mathrm{Ker}\psi\subseteq J(\Lambda)P$.

证明　设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 A 的生成集，且 A 的其它任意生成元集所含元素个数都不小于 n. F 是一个自由左 Λ-模，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是它的基，规定 ψ: $F\to A$，使 $\psi(e_i)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$. 易知，$\psi$ 是

一个左 Λ-满同态. 设 $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n\in \mathrm{Ker}\psi$, 我们断定每个 $\lambda_i\in J(\Lambda)$. 反之, 不妨设 $\lambda_1\notin J_1$. 由定理 1.6.10 知, λ_1 是可逆的.

$\because\quad \psi(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n)=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0,$

$\therefore\quad a_1=(-\lambda_1^{-1}\lambda_2)a_2+(-\lambda_1^{-1}\lambda_3)a_3+\cdots+(-\lambda_1^{-1}\lambda_n)a_n.$

因此 $\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是 A 的生成集. 这与 $\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$ 的选取法矛盾, 所以 $\mathrm{Ker}\psi\subseteq J(\Lambda)F$. 另外, 由 Nakayama 引理知, $J(\Lambda)F\ll F$. 故 $\mathrm{Ker}\psi\ll F$. 因此, (F,ψ) 是 A 的一个投射覆盖, 适合我们的要求.

定理 1.6.12 设 Λ 是拟局部环, P 是 f.g. 投射左 Λ-模, 则 P 是自由模.

证明 因 $(P,1_p)$ 是 P 的投射覆盖, 故由引理 1.6.11 知, P 必是自由模. 更一般地, 拟局部环上任意投射模皆是自由模. 其证明可参考文献 [6] 或 [51].

定义 设 Λ 是环, 若 $\Lambda/J(\Lambda)$ 是半单环, 则称 Λ 为拟半局部环.

命题 1.6.13 设 Λ 是拟半局部环, 则 $J(\Lambda)$ 是 Λ 的有限个极大左理想的交.

证明 因 Λ 是拟半局部环, 故 Λ/J 是半单环. 因此, $\Lambda/J(\Lambda)=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_n$, 这里 S_i 是单纯模. 对每个 j, $\oplus_{i\neq j}S_i=I_j/J(\Lambda)$, I_j 是 Λ 的一个极大左理想, 并且, 显然有 $J(\Lambda)=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$.

类似地, 若 Λ 是拟半局部环, 则 $J(\Lambda)$ 是 Λ 的有限个极大右理想的交.

命题 1.6.14 设 Λ 是拟半局部环, A 是任意左 Λ-模, 则 $J(\Lambda)A=\mathrm{Rad}A$, 且 $A/J(\Lambda)A$ 是半单纯模.

证明 令 $\mathscr{S}=\{S\mid S$ 是单纯左 Λ-模$\}$, $\mathrm{Ann}_\Lambda S=\{\lambda\in\Lambda\mid\lambda s=0,\forall\, s\in S\}$, 显然 $\mathrm{Ann}_\Lambda S$ 是 Λ 的一个理想. 记 $I=\bigcap_{S\in\mathscr{S}}\mathrm{Ann}_\Lambda S$, 则 I 也是 Λ 的一个理想. 因此 $I=\Lambda I$. 我们首先断定 $J(\Lambda)=I$. 设 L 是一个极大左理想, 则 Λ/L 是单纯模. 因此 $I(\Lambda/L)=0$. 于是得 $I=\Lambda I\subseteq L\subseteq J(\Lambda)$. 反过来, 若 $x\in\Lambda$ 且 $x\notin I$, 则存在一个单纯模 S, 使得 $xS\neq0$. 因 S 是单纯模, $\Lambda xS=S$, 故 $x\Lambda xS=xS\neq0$. 令 $\lambda\in\Lambda$ 和 $s\in S$, 使 $x\lambda xs\neq0$. 因 $\lambda xs\neq0$, 故 $\Lambda\lambda xs=S$. 规定 f: $\Lambda\to S$, 使 $\gamma\mapsto\gamma\lambda xs(\forall\,\gamma\in\Lambda)$, 则 f 是左 Λ-满同态, 且 $f(x)=x\lambda xs\neq0$. 由命题 1.6.4 知, $f(J(\Lambda))\subseteq\mathrm{Rad}S$,

但 S 是单纯模，$\mathrm{Rad}S=0$，故$f(J(\Lambda))=0$. 于是知 $x\in J(\Lambda)$. 所以 $J(\Lambda)=I$. 其次，因 $\mathrm{Rad}(A/\mathrm{Rad}A)=0$，由定理 1.6.3 知，$A/\mathrm{Rad}A$ 是半单纯模. 但 $J(\Lambda)$零化每个单纯模，故$J(\Lambda)(A/\mathrm{Rad}A)=0$. 因此，$J(\Lambda)A\subseteq\mathrm{Rad}A$. 反过来，因 $\Lambda/J(\Lambda)$是半单环，故左 $\Lambda/J(\Lambda)$-模 $A/J(\Lambda)A$是半单纯的. 但 $J(\Lambda)$被包含在左 Λ-模 $A/J(\Lambda)A$ 的零化子内，故 $A/J(\Lambda)A$ 是半单纯左 Λ-模. 因此 $\mathrm{Rad}(A/J(\Lambda)A)=0$. 由命题 1.6.4，得 $\mathrm{Rad}(A)\subseteq J(\Lambda)A$.

由命题 1.6.14 证明知，对任意环 Λ 和任一左 Λ-模 A，必有 $J(\Lambda)A\subseteq\mathrm{Rad}A$.

定义 设 Λ 是交换环，若 Λ 仅含有有限个极大理想，则称 Λ 为半局部环.

设 Λ 是交换半局部环，令 m_1，m_2，…，m_n 是它的所有极大理想，则 $J(\Lambda)=m_1\cap m_2\cap\cdots\cap m_n$，并且有

$$\Lambda/J=\Lambda/m_1\oplus\Lambda/m_2\oplus\cdots\oplus\Lambda/m_n,$$

这里每个 Λ/m_i 是域. 故 Λ/J 是半单环. 为方便起见，今后把拟半局部环和交换半局部环统称为半局部环.

关于交换半局部环有以下两个重要结果：

定理 1.6.15 交换半局部环 Λ 上每个 f.g. 投射左 Λ-模是自由的 $\Leftrightarrow\Lambda$ 是不可分的.

定理 1.6.16 设 Λ 是交换半局部环，则 Λ 有一个环的分解 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，这里 Λ_i 是不可分的半局部环. 若 A 是 f.g. 投射左 Λ-模，则 A 可以分解为 $A\cong\Lambda_1^{(r_1)}\oplus\Lambda_2^{(r_2)}\oplus\cdots\oplus\Lambda_n^{(r_n)}$，并且，$A$ 是 Λ-自由模当且仅当 $r_1=r_2=\cdots=r_n$.

以上两个定理的证明，可参考文献 [24].

最后，给出环是半单环的一个判别定理.

定理 1.6.17 环 Λ 是半单的当且仅当 Λ 是左 SF-环，且满足主左理想的升链条件.

证明 只需证充分性. 令 $S=\mathrm{Soc}({}_\Lambda\Lambda)$，我们将证明 $S=\Lambda$. 若 $S\neq\Lambda$，则存在 Λ 的极大左理想 m，使 $S\subseteq m$，且 $m\trianglelefteq\Lambda$. 因 Λ 是左 SF-环，故 Λ/m 是平坦模. 于是对 $a\in m$ 且 $a\neq0$，由推论 1.2.2 知，必存在 b_1

$\in m$，使 $a=ab_1$. 同理，又存在 $b_2\in m$，使 $b_1=b_1b_2$. 所以，在 m 中存在 b_1，b_2，…，b_t，…，使得

$$a=ab_1,\ b_1=b_1b_2,\ \cdots,\ b_{t-1}=b_{t-1}b_t,\ \cdots,$$

同此有

$$\Lambda a\subseteq\Lambda b_1\subseteq\Lambda b_2\subseteq\cdots\subseteq\Lambda b_t\subseteq\cdots.$$

因 Λ 满足主左理想升链条件，故 $\Lambda b_n=\Lambda b_{n+1}$，对某个正整数 n. 于是得 $b_n=b_nb_{n+1}$，且 $b_{n+1}=cb_n$ 对某个 $c\in\Lambda$. 因此 $b_n=b_ncb_n$. 令 $e_1=cb_n$，则 $e_1^2=e_1\in m$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad m&=\Lambda\cap m=(\Lambda e_1\oplus\Lambda(1-e_1))\cap m\\&=\Lambda e_1\oplus\Lambda(1-e)\cap m.\end{aligned}$$

由于 $m\trianglelefteq\Lambda$，因此 $\Lambda(1-e_1)\cap m\neq 0$. 对任意 $c(\neq 0)\in\Lambda(1-e_1)\cap m$，又存在 $d\in m$，使 $c=cd$. 由 $m=\Lambda e_1\oplus\Lambda(1-e_1)\cap m$，得 $d=d'_1+d_1$，其中 $d'_1\in\Lambda e_1$，$d_1\in\Lambda(1-e_1)\cap m$. 因此 $c=cd=cd'_1+cd_1$. 于是得

$$c-cd_1=cd'_1\in\Lambda e_1\cap\Lambda(1-e_1)\cap m=0.$$

所以 $c=cd_1$. 这样，仿照上面的方法知，存在 $e_2\in\Lambda(1-e_1)\cap m$，$e_2^2=e_2$，并且有

$$\Lambda(1-e_1)\cap m=\Lambda e_2\oplus\Lambda(1-e_2)\cap\Lambda(1-e_1)\cap m.$$

易知 $e_2e_1=0$，且

$$m=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\Lambda(1-e_2)\cap\Lambda(1-e_1)\cap m.$$

重复上面讨论，便得

$$m=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_t\oplus\Lambda(1-e_t)\cap\cdots\cap\Lambda(1-e_2)\cap\Lambda(1-e_1)\cap m,$$

其中 $e_i^2=e_i\in m$，$e_je_k=0$，$i=1,2,\cdots,t$；$j>k=1,2,\cdots,t$.

因为 $\Lambda e_j=\Lambda e_j(e_1+e_2+\cdots+e_j)\subseteq\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_j)$，$j=1,2,\cdots$，

且 $\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_{k-1})\subseteq\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_k)+\Lambda e_k$

$$=\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_k),k=2,3,\cdots,$$

所以 $\qquad\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_t)\supseteq\Lambda e_1+\Lambda e_2+\cdots+\Lambda e_t.$

易知 $\qquad\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_t)\subseteq\Lambda e_1+\Lambda e_2+\cdots+\Lambda e_t.$

$$\therefore\quad\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_t)=\Lambda e_1+\Lambda e_2+\cdots+\Lambda e_t,i=1,2,\cdots.$$

因此得

$$\Lambda e_1\subseteq\Lambda(e_1+e_2)=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\subseteq\cdots\subseteq\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_r)$$
$$=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_r\subseteq\cdots.$$

由已知条件知，存在正整数 n，使

$$\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_n)=\Lambda(e_1+\cdots+e_n+e_{n+1})=\cdots.$$

$$\therefore\quad m=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_n=\Lambda(e_1+e_2+\cdots+e_n)=\Lambda e,$$

其中 $e=e_1+e_2+\cdots+e_n$. 因此 m 是有限生成的，Λ/m 是 f. p. 的平坦模. 由命题 1.2.4(ii)知，Λ/m 是投射模. 从而 m 是${}_\Lambda\Lambda$ 的直和项. 这与 m 在 Λ 中是本质的相矛盾，所以 $\Lambda=S=\mathrm{Soc}({}_\Lambda\Lambda)$，即 Λ 是半单环.

1.7 半完全环和完全环

在本节里，我们将讨论每个 f.g. 模(或每个模)都有投射覆盖的环. Bass 在文献 [12] 中研究了这类环.

半完全环和完全环都是半局部环，并且与幂等元提升问题有着密切的关系.

定义 设 Λ 是环，I 是 Λ 的理想. 幂等元 $g+I\in\Lambda/I$ 称为模 I 可提升的，如果存在 Λ 的幂等元 e，使 $g+I=e+I$.

设 Λ 是环，$\lambda\in\Lambda$ 叫做幂零元，若存在自然数 n，使 $\lambda^n=0$. 把环 Λ 的左(右、双边)理想叫做诣零的，如果它的每个元素都是幂零的.

命题 1.7.1 设 I 是环 Λ 的诣零理想，则 Λ/I 的任意幂等元可以模 I 提升.

证明 设 $g\in\Lambda$，使 $g+I=g^2+I$. 因 I 是诣零的，$g-g^2\in I$，故存在自然数 n，使$(g-g^2)^n=0$. 应用二项式公式，得

$$0=(g-g^2)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}g^{n-k}(-g^2)^k$$
$$=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}g^{n+k}$$
$$=g^n-g^{n+1}\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}g^{k-1}\right).$$

令 $t=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}g^{k-1}$，则

$$g^n=g^{n-1}t,\ gt=tg.$$

又令 $e=g^nt^n$，则

$$\begin{aligned}e&=g^nt^n=(g^{n+1}t)t^n=g^{n+1}t^{n+1}\\&=g^{n+2}t^{n+2}=\cdots=g^{2n}t^{2n}=e^2.\end{aligned}$$

故 $e\in\Lambda$ 是幂等元，并且有

$$\begin{aligned}g+I&=g^n+I=g^{n+1}t+I=(g^{n+1}+I)(t+I)\\&=(g+I)(t+I)=gt+I.\end{aligned}$$

因此 $g+I=(g+I)^n=(gt+I)^n=g^nt^n+I=e+I.$

引理 1.7.2 设左 Λ-模 A 有分解 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$，且每个 A_i 有投射覆盖，$i=1, 2, \cdots, n$，则 Λ-同态 $p: P\to A$ 是投射覆盖$\Leftrightarrow P$ 有分解 $P=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n$，且$(p|P_i): P_i\to A_i$ 是投射覆盖.

证明 设 $q_i: Q_i\to A_i$ 是 A_i 的投射覆盖，令 $P'=Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots\oplus Q_n$. 定义 $p': P'\to A$，使 $\sum_{i=1}^n x_i\to\sum_{i=1}^n q_i(x_i), \forall\ x_i\in Q_i$. 易知$(P',p')$是 A 的投射覆盖.

如果(P,p)是 A 的投射覆盖，那么由投射覆盖的唯一性知，$P\cong Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots\oplus Q_n$. 这就是所要求的 P 的分解.

反过来，令 $q_i=(p|P_i)$，由上面的讨论知，(P,p)是 A 的投射覆盖.

引理 1.7.3 循环左 Λ-模 A 有投射覆盖$\Leftrightarrow A\cong\Lambda e/Ie$，这里 $e\in\Lambda$ 是幂等元，$I\subseteq J(\Lambda)$是 Λ 的左理想；并且，若 e，I 满足这些条件，则 $\Lambda e\to\Lambda e/Ie\to 0$ 是投射覆盖.

证明 若循环模 A 有投射覆盖(P,ψ)，因存在正合列 $\Lambda\xrightarrow{f}A\longrightarrow 0$，则由投射覆盖性质知，$\Lambda\cong P\oplus P'$，$P'\subseteq\mathrm{Ker}f$，且 $(f|P)$: $P\to A$ 是投射覆盖. 因此不妨取 ψ 为 $(f|P)$，并令 $e\in\Lambda$ 是对应于分解 $\Lambda\cong P\oplus P'$ 的幂等元. 于是得

$$A\cong P/\mathrm{Ker}\psi=\Lambda e/\mathrm{Ker}\psi.$$

记 $K=\mathrm{Ker}f$，则 K 是 Λ 的一个理想.

$$\therefore\quad \mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}(f|P)=P\cap\mathrm{Ker}f=\Lambda e\cap K=Ke.$$

令 $I=Ke$，则 I 是 Λ 的左理想，$Ke=Ie$. 故 $A\cong\Lambda e/Ie$. 又因 $I=Ke=$

$\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}(f|P)\ll_{\Lambda}\Lambda$，由定理 1.6.7，得 $I\subseteq J(\Lambda)$.

反过来，设 $A\cong\Lambda e/Ie$，考虑自然同态 f：$\Lambda e\to\Lambda e/Ie$，则 $\mathrm{Ker}f=Ie$. 因 $I\subseteq J(\Lambda)$，故 $Ie\subseteq J(\Lambda)e=J(\Lambda e)$. 由命题 1.6.5 知 $J(\Lambda e)\ll\Lambda e$. 于是 $Ie\ll\Lambda e$. 显然 Λe 也是投射模. 所以 $(\Lambda e,f)$ 是 A 的投射覆盖.

命题 1.7.4 设 I 是环 Λ 的理想，$I\subseteq J(\Lambda)$，则下列陈述是等价的：

(i) Λ/I 的任意幂等元可以模 I 提升；

(ii) 左 Λ-模 Λ/I 的每个直和项有投射覆盖；

(iii) Λ/I 的任意一组正交幂等元可以模 I 提升为 Λ 的一组正交幂等元.

证明 (i) ⇒ (ii) 设 A 是${}_{\Lambda}(\Lambda/I)$的直和项. 则 A 也是${}_{\Lambda/I}(\Lambda/I)$的直和项. 因此 A 是由 Λ/I 的某个幂等元 $g+I$ 生成的. 由(i)，存在 $e\in\Lambda$ 是幂等元，使 $e+I=g+I$. 又由命题 1.5.15，得

$${}_{\Lambda}A=(\Lambda/I)(e+I)=(\Lambda e+I)/I\cong\Lambda e/Ie.$$

因此，由引理 1.7.3 知，A 有投射覆盖.

(ii)⇒(iii) 设 $\{g_1+I, g_2+I, \cdots, g_{n-1}+I\}$ 是 R/I 的任意正交幂等元集，令 $g_n+I=1-(g_1+g_2+\cdots+g_{n-1})+I$，则 $\{g_1+I, g_2+I, \cdots, g_n+I\}$ 是 Λ/I 的完全正交幂等元集. 于是得

$$\Lambda/I=(\Lambda/I)(g_1+I)\oplus(\Lambda/I)(g_2+I)\oplus\cdots\oplus(\Lambda/I)(g_n+I).$$

由(ii)知，$(\Lambda/I)(g_i+I)$有投射覆盖，$i=1, 2, \cdots, n$. 因$I\subseteq J(\Lambda)$，故自然同态 p：$\Lambda\to\Lambda/I$ 是 Λ 的投射覆盖. 因此，由引理 1.7.2 知，$\Lambda=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_n$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 Λ 的完全正交幂等元集，并且

$$p(\Lambda e_i)=(\Lambda/I)(e_i+I)\cong(\Lambda/I)(g_i+I),\ i=1, 2, \cdots, n.$$

由 $1+I$ 表示的唯一性，得

$$e_i+I=g_i+I,\ i=1, 2, \cdots, n.$$

(iii)⇒(i) 显然结论是成立的.

定义 设 Λ 是环，若 $\Lambda/J(\Lambda)$是半单环，且 $\Lambda/J(\Lambda)$的任意幂等元可以模 $J(\Lambda)$提升，则称 Λ 为半完全环.

命题 1.7.5 设 Λ 是半完全环，则左 Λ-模 A 有投射覆盖的充分条件是：对任意左 Λ-模 B，若 B 的生成元不多于 A 的生成元，则 $B=J(\Lambda)B\Rightarrow B=0$.

证明 因 Λ 是半完全环，则 $\Lambda/J(\Lambda)$ 是半单环，$A/J(\Lambda)A$ 是左 $\Lambda/J(\Lambda)$-半单纯模，故 $A/J(\Lambda)A=\oplus_i(\Lambda/J(\Lambda))(g_i+J(\Lambda))$，其中 $g_i+J(\Lambda)$ 是幂等元. 由题设，$g_i+J(\Lambda)$ 可以模 $J(\Lambda)$ 提升为 e_i. 于是得

$$\begin{aligned}A/J(\Lambda)A&=\oplus_i(\Lambda/J(\Lambda))(g+J(\Lambda))\\&=\oplus_i(\Lambda/J(\Lambda))(e_i+J(\Lambda))\\&=\oplus_i(\Lambda e_i/J(\Lambda)e_i)\cong\oplus_i\Lambda e_i/\oplus_i J(\Lambda)e_i.\end{aligned}$$

令 $P=\oplus_i\Lambda e_i$，则 $\oplus_i J(\Lambda)e_i=\oplus_i J(\Lambda)\Lambda e_i=J(\Lambda)(\oplus_i\Lambda e_i)=J(\Lambda)P$. 考虑右图，其中 f，g 是自然同态，$\varphi$ 是同构. 由于 P 是投射模，因此存在 Λ-同态 f'，h，使

$$\begin{array}{ccccc}P & \underset{f'}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & P/J(\Lambda)P & \longrightarrow & 0\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ A & \xrightarrow{g} & A/J(\Lambda)A & \longrightarrow & 0\end{array}$$

$$gh=\varphi f,\quad ff'=1_{P/J(\Lambda)P}.$$

首先，我们证明 $J(\Lambda)A\ll A$. 若 $A=J(\Lambda)A+B$，则 $J(\Lambda)(A/B)=(J(\Lambda)A+B)/B=A/B$. 因 A/B 的生成元不多于 A 的生成元，故由题设知，$A/B=0$. 所以 $J(\Lambda)A\ll A$.

现在，对任意 $x\in A$，$x=hf'\varphi^{-1}g(x)+(x-hf'\varphi^{-1}g(x))$. 但 $x-hf'\varphi^{-1}g(x)\in\mathrm{Ker}g=J(\Lambda)A$，因此 $A=h(P)+J(\Lambda)A$. 故 $A=h(P)$，即 h 是满同态. 其次，由于 P 的生成元不多于 A 的生成元，因此 $J(\Lambda)P\ll P$. 又由于 $\mathrm{Ker}h\subseteq\mathrm{Ker}gh=J(\Lambda)P$，因此 $\mathrm{Ker}h\ll P$. 所以 (P,h) 是 A 的投射覆盖.

定义 设 Λ 是环，若每个 f.g. 左（右）Λ-模有投射覆盖，则称 Λ 为左（右）半完全环.

定理 1.7.6 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左半完全环；

(ii) Λ 是半完全环；

(iii) Λ 是右半完全环.

证明 (i)⇒(ii) 因 $\Lambda/J(\Lambda)$ 的每个直和项是有限生成的，由(i)知它有投射覆盖. 根据命题 1.7.4，得 $\Lambda/J(\Lambda)$ 的任意幂等元可以模 $J(\Lambda)$ 提升.

其次，设 L 是 Λ 的任意左理想，且 $J(\Lambda)\subseteq L$. 因 Λ/L 是循环模，

由(i)知，Λ/L 有投射覆盖. 因此由命题 1.7.3，得

$$\Lambda/L\cong\Lambda e/Ie,$$

这里 $e\in\Lambda$ 是幂等元，$I\subseteq J(\Lambda)$是左理想. 故 $Ie\subseteq J(\Lambda)e$. 于是得

$$J(\Lambda)(\Lambda e/Ie)\cong J(\Lambda)(\Lambda/L)=0.$$

因而 $J(\Lambda)e=J(\Lambda)\Lambda e\subseteq Ie$. 于是 $J(\Lambda)e=Ie$.

$\therefore\quad \Lambda/L\cong\Lambda e/Ie=\Lambda e/J(\Lambda)e\cong(\Lambda/J(\Lambda))(e+J(\Lambda))$.

因 $e+J(\Lambda)$是 $\Lambda/J(\Lambda)$的幂等元，而$(\Lambda/J(\Lambda))(e+J(\Lambda))$是 $\Lambda/J(\Lambda)$的直和项，故$(\Lambda/J(\Lambda))(e+J(\Lambda))$是投射 $\Lambda/J(\Lambda)$-模. 因此 Λ/L 是投射 $\Lambda/J(\Lambda)$-模.

考虑正合列

$$0\to L/J(\Lambda)\to\Lambda/J(\Lambda)\to\Lambda/L\to 0.$$

因 Λ/L 是投射模，由定理 1.1.1 知，这个序列是分裂的，故 $L/J(\Lambda)$是 $\Lambda/J(\Lambda)$的直和项. 又由定理 1.5.17 知，$\Lambda/J(\Lambda)$是半单环.

综合以上讨论知，Λ 是半完全环.

(ii)⇒(i) 设 A 是任意 f. g. 左 Λ-模，左 Λ-模 B 的生成元不多于 A 的生成元，则 B 是有限生成的. 若 $J(\Lambda)B=B$，由 Nakayama 引理，得 $B=0$. 因此由命题 1.7.5 知，A 有投射覆盖. 故 Λ 是左半完全的.

同理，(ii)⇔(iii)也是成立的.

定义 设 Λ 是环，若每个左(右)Λ-模有投射覆盖，则称 Λ 是左(右)完全环.

定义 设 I 是环 Λ 的理想，若对 I 中元素的序列 a_1，a_2，…，存在自然数 n，使得

$$a_1a_2\cdots a_n=0(a_n\cdots a_2a_1=0),$$

则称 I 为左(右)T-幂零的.

以下我们始终用 J 代表环 Λ 的 Jacobson 根 $J(\Lambda)$.

定理 1.7.7 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左完全环；

(ii) Λ/J 是 Artin 环，且 J 是左 T-幂零的.

我们先证明几个引理和命题.

引理 1.7.8 设环 Λ 的 Jacobson 根 J 是左 T-幂零的，则对任意左

Λ-模 A，若 $JA=A$，必有 $A=0$.

证明 若 $JA=A\neq 0$，记 $\mathrm{Ann}_\Lambda A=\{\lambda\in\Lambda\mid\lambda A=0\}$，因此，存在 $a_1(\neq 0)\in J$ 且 $a_1\notin\mathrm{Ann}_\Lambda A$. 于是得 $a_1A=a_1JA\neq 0$. 因而，又存在 $a_2(\neq 0)\in J$ 且 $a_2\notin\mathrm{Ann}_\Lambda A$，使得 $a_1a_2A=a_1a_2JA\neq 0$. 于是得 $a_1a_2\neq 0$. 这样继续下去，就存在 J 的元素序列 a_1，a_2，…，使得 $a_1a_2\cdots\neq 0$. 这与 J 是左 T-幂零相矛盾，所以 $A=0$.

引理 1.7.9 设 a_1，a_2，…是环 Λ 的元素序列，F 是以 x_1，x_2，…为基的左 Λ-自由模. 对自然数 n，令 $y_n=x_n-a_nx_{n+1}$，G 是由 y_1，y_2，…生成的 F 的子模，则

(i) G 是以 y_1，y_2，…为基的自由模；

(ii) $G=F\Leftrightarrow$对每个自然数 k，必有 $n\geqslant k$ 使 $a_ka_{k+1}\cdots a_n=0$.

证明 (i) 令 $n\geqslant k$，且 λ_k，λ_{k+1}，…，$\lambda_n\in\Lambda$，则

$$\lambda_ky_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}+\cdots+\lambda_ny_n$$
$$=\lambda_kx_k+(\lambda_{k+1}-\lambda_ka_k)x_{k+1}+\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1}a_{n-1})x_n-\lambda_na_nx_{n+1}.$$

因此，若 $\lambda_ky_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}+\cdots+\lambda_ny_n=0$，由于 x_1，x_2，…是 F 的基，则 $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 故 y_1，y_2，…是 G 的基.

(ii) 若 $G=F$，任取 $x_k\in F$，则

$$x_k=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n=\lambda_1x_1+(\lambda_2-\lambda_1a_1)x_2+\cdots+(\lambda_k-\lambda_{k-1}a_{k-1})x_k+\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1}a_{n-1})x_n-\lambda_na_nx_{n+1},$$

这里 $\lambda_i\in\Lambda$，$i=1$，2，…，n. 比较两端系数，得

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0,$$

$$\lambda_k=1,\ \lambda_{k+1}=\lambda_ka_k,\ \lambda_{k+2}=\lambda_{k+1}a_{k+1},\ \cdots,\ \lambda_n=\lambda_{n-1}a_{n-1},$$

$$\lambda_na_n=0.$$

所以 $a_ka_{k+1}\cdots a_n=0$.

反过来，对每个 $x_k\in F$，由题设必有自然数 $n\geqslant k$，使 $a_ka_{k+1}\cdots a_n=0$. 由于

$$x_k=y_k+a_ky_{k+1}+\cdots+(a_k-a_{n-1})y_n+(a_ka_{k+1}\cdots a_n)x_{n+1},$$

因此 $x_k\in G$. 所以 $G=F$.

命题 1.7.10 设 P 是投射左 Λ-模，则 $\mathrm{Rad}P=JP$.

证明 因 P 是投射模，由定理 1.1.1，得 $P\oplus P'=\Lambda^{(I)}$.

$$\therefore \quad \mathrm{Rad}P \oplus \mathrm{Rad}P' = \mathrm{Rad}\Lambda^{(I)} = (\mathrm{Rad}\Lambda)^{(I)} = J^{(I)}$$
$$= J\Lambda^{(I)} = J(P \oplus P') = JP \oplus JP'.$$

由命题 1.6.14 后面的说明知，$\mathrm{Rad}P \supseteq JP$ 和 $\mathrm{Rad}P' \geqslant JP'$. 故 $\mathrm{Rad}P = JP$.

命题 1.7.11 设 P 是投射左 Λ-模，若 $JP=P$，则 $P=0$.

证明 因 P 是投射模，由命题 1.7.10 知，$\mathrm{Rad}P=JP=P$. 用反证法，若 $P\neq 0$，因 P 是投射模，故 $F=P\oplus P'$，F 是自由模，$\{x_i \mid i\in I\}$ 是它的基. 因此，存在 $e\in \mathrm{End}_\Lambda F$，使得 $Fe=P$. 对任意 $x\in P$，则

$$x = \sum\nolimits_{i\in H} \lambda_i x_i \ , \tag{1}$$

其中 $H\subseteq I$ 是有限子集，$\lambda_i\in\Lambda$，$\forall\ i\in H$.

$\because \quad x_i e\in Fe=P=JP\subseteq JF$，

$$\therefore \quad x_i e = \sum\nolimits_{j\in H_i} a_{ij} x_j (\forall\ i\in H), \tag{2}$$

这里 $H_i\subseteq I$ 是有限子集，$a_{ij}\in J$，$\forall\ i,j$.

添加系数为零的项后，可以假设(1)和(2)式右端中系数的下标属于 I 的一个共同子集 K.

因 $x\in P=Fe$，$x=xe$，故得

$$\begin{aligned} 0 = x - xe &= \left(\sum\nolimits_{i\in K}\lambda_i x_i\right) - \left(\sum\nolimits_{i\in K}\lambda_i x_i e\right) \\ &= \left[\sum\nolimits_{i\in K}\lambda_i\left(\sum\nolimits_{j\in K}\delta_{ij}x_j\right)\right] - \left[\sum\nolimits_{i\in K}\lambda_i\left(\sum\nolimits_{j\in K}a_{ij}x_j\right)\right] \\ &= \sum\nolimits_{j\in K}\left[\sum\nolimits_{i\in K}\lambda_i(\delta_{ij}-a_{ij})\right]x_j. \end{aligned} \tag{3}$$

令 $n=\mathrm{Card}(K)$，因$\{x_i \mid i\in I\}$是 F 的基，由(3)式得矩阵方程

$$[\lambda_i](E_n-[a_{ij}])=[0], \tag{4}$$

这里 $[\lambda_i] = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$，$E_n$ 是 $M_n(\Lambda)$的单位矩阵，且

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

易证 $M_n(J)=J(M_n(\Lambda))$，故$[a_{ij}]\in J(M_n(\Lambda))$. 由定理 1.6.7 知，$E_n-[a_{ij}]$在 $M_n(\Lambda)$可逆. 因此，由(4)式得$[\lambda_i]=0$，即 $\lambda_i=0(\forall\ i)$. 于是

便有

$$x = \sum_{i\in K}\lambda_i x_i = 0.$$

所以 $P=0$,这就导出矛盾.

下面证明定理 1.7.7.

证明 (i)⇒(ii) 因 Λ 是左完全环,显然它是左半完全环. 由定理 1.7.6, Λ/J 是 Artin 环. 因而,仅需证 J 是左 T-幂零的. 令 a_1, a_2, …是 J 的元素序列,按照引理 1.7.9,构造自由模 F 和 G, 并且若 $G=F$, 则 J 是左 T-幂零的.

因 Λ 是左完全环, F/G 有投射覆盖 (P,ψ),故得下面的交换图 (5), 其中行列正合, φ 是自然同态, $ff'=1_P$. 令 $Q=\mathrm{Ker}f$, 则 $F\cong P\oplus Q$. 因 $F=G+JF$, 故 $F=G+JP\oplus JQ$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathrm{Ker}f & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & F/G & \longrightarrow & 0 \\ & & & & f'\uparrow\,\downarrow f & & \downarrow 1_{F/G} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\psi & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\psi} & F/G & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \qquad (5)$$

再证 $G=Q\oplus\mathrm{Ker}\varphi$. 设 $x\in G=\mathrm{Ker}\varphi\subseteq F$, 因 $x=p+q$, $p\in P$, $q\in Q$, 于是得

$$0=\varphi(x)=\varphi(p+q)=\psi f(p+q)=\psi f(p)+\psi f(q)=\psi f(p).$$

因此 $f(p)\in\mathrm{Ker}\psi$, $G=Q\oplus\mathrm{Ker}\psi$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad F\cong P\oplus Q&=G+JP\oplus JQ+(Q\oplus\mathrm{Ker}\psi)+(JP\oplus JQ)\\&=(\mathrm{Ker}\psi+JP)\oplus(Q+JQ)\\&=(\mathrm{Ker}\psi+JP)\oplus Q.\end{aligned}$$

于是 $P=\mathrm{Ker}\psi+JP$. 因 $\mathrm{Ker}\psi\ll P$, 故 $JP=P$. 由命题 1.7.11 知, $P=0$. 所以 $F=G$. 又由引理 1.7.9 知, J 是左 T-幂零的.

(ii)⇒(i) 因 J 是左 T-幂零的, 故它是诣零的. 由命题 1.7.1,

Λ/J 的任意幂等元可以模 J 提升，并且 Λ/J 是 Artin 环，故 Λ/J 是半单的．所以 Λ 是半完全环．其次，设 A 是任意左 Λ-模，由于 J 是 T-幂零的，因此对任意模 B，若 $JB=B$，则由引理 1.7.8 知 $B=0$. 又由命题 1.7.5 知，A 有投射覆盖．所以 Λ 是左完全环．

定理 1.7.12(Bass) 设 Λ 是环，J 是 Λ 的 Jacobson 根，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左完全环；

(ii) Λ/J 是 Artin 环，且 J 是左 T-幂零的；

(iii) 任意平坦左 Λ-模是投射的；

(iv) Λ 的任意右主理想链满足降链条件；

(v) 不存在 Λ 的无限正交幂等元，且对任意非零右 Λ-模 A，$\mathrm{Soc}A \neq 0$.

首先，我们还需证明一些引理和命题．

引理 1.7.13 设（$\{a_i\}$，F，G）的定义如引理 1.7.9，若 G 是 F 的直和项，则主右理想链

$$a_1\Lambda \supseteq a_1a_2\Lambda \supseteq \cdots$$

是趋于平稳的．

证明 由引理 1.7.9 知，有一个同构 $F \to G$，使 $x_i \to y_i$. 若包含映射 $G \to F$ 是分裂的，则存在一个自同态 $e \in \mathrm{End}_\Lambda F$，使 $y_ie=x_i$. 对任意自然数 n，有 $x_ne=\sum_m \lambda_{nm}x_m$，这里 $\lambda_{nm} \in \Lambda$.

$$\therefore \quad x_n = y_ne = (x_n - a_nx_{n+1})e = \sum_m (\lambda_{nm} - a_n\lambda_{n+1,m})x_m.$$

于是得

$$\lambda_{nm} - a_n\lambda_{n+1,m} = \delta_{nm}.$$

由于 $\{\lambda_{1m} \mid \forall\, m\}$ 中仅有有限个 λ_{1m} 可能不为零，因此存在一个自然数 k，使得 $\lambda_{1n}=0$，$\forall\, n \geqslant k$. 于是对每个 $n \geqslant k$，必有

$$\begin{aligned}
&-a_1 a_2\cdots a_n\lambda_{n+1,n} \\
&\quad = a_1a_2\cdots a_{n-1}\ (1-\lambda_{nn}) \\
&\quad = a_1a_2\cdots a_{n-1} - a_1a_2\cdots a_{n-1}\lambda_{nn} \\
&\quad = a_1a_2\cdots a_{n-1} - a_1a_2\cdots a_{n-2}\lambda_{n-1,n}
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}-a_1\lambda_{1n}$$
$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$
所以，对每个 $n\geqslant k$，皆有 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\in a_1a_2\cdots a_n\Lambda$.

命题 1.7.14 设 $A(\neq 0)$是左 Λ-模，且 A 的直和项满足升链或降链条件，则 A 是有限个不可分模的直和

$$A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n.$$

证明 若 A 是无限可分的，则 A 有分解式 $A=B'\oplus A'$，B'，A' 是真子模，且有一个直和项(不妨取)A'无限可分．于是得

$$A=B'\oplus A',A'=B''\oplus A'',\cdots.$$

因此存在无限升链或降链

$$B'\subset B'\oplus B'\subset B'\oplus B''\oplus B''\subset\cdots,$$
$$A\supset A'\supset A''\supset\cdots.$$

这与 A 的直和项满足升链条件或降链条件相矛盾．

现在证明定理 1.7.12.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 就是定理 1.7.7，故结论成立．

(i)$\Rightarrow$(iii) 设 U 是平坦左 Λ-模，由(i)知有投射覆盖 $P\xrightarrow{f}U\longrightarrow 0$，故 $U\cong P/K$，$K=\mathrm{Ker}f$，且 $K\ll P$. 因 P 是投射模，由命题 1.7.10 知，$\mathrm{Rad}P=JP$. 又由命题 1.6.2 知，$\mathrm{Rad}P=\sum\{C\subseteq P\mid C\ll P\}$．故 $K\subseteq\mathrm{Rad}P=JP$.

另外，P 和 U 都是平坦模，由定理 1.2.1 知，存在 Z-同构

μ_1：$J\otimes_\Lambda P\to JP$ 使 $a\otimes p\to ap$，$a\in J$，$p\in P$，

μ_2：$J\otimes_\Lambda U\to JU$ 使 $a\otimes u\to au$，$a\in J$，$u\in U$.

考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & JP & \xrightarrow{(f|JP)} & JU \\ & & \uparrow{\scriptstyle\mu_1} & & \uparrow{\scriptstyle\mu_2} \\ J\otimes_\Lambda K & \xrightarrow{J\otimes i_k} & J\otimes_\Lambda P & \xrightarrow{J\otimes f} & J\otimes_\Lambda U \end{array}$$

其中行正合，i_k：$K\to P$ 是包含映射．

$\therefore\quad K=\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}(f|JP)=\mu_1(\mathrm{Ker}(J\otimes f))$

$$=\mu_1(\mathrm{Im}(J\otimes i_k))=JK.$$

因 J 是左 T-幂零的，故由引理 1.7.8 得 $K=0$. 所以 $U\cong P$，U 是投射模．

(iii)⇒(iv) 由 Λ 的每个右主理想链可以写成

$$a_1\Lambda\supseteq a_1a_2\Lambda\supseteq\cdots, \tag{6}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots$ 是 Λ 的元素序列. 按照引理 1.7.9,可以得到模 F 和 G. 因 $y_n=x_n-a_nx_{n+1}$，故 $y_1,y_2,\cdots,y_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots$ 也是 F 的基．所以，F 的每个子模 $G_n=\sum_{i=1}^{n}\Lambda y_i$ 是 F 的直和项，且每个商模F/G_n是自由模. 从而 F/G_n 是平坦模．又由命题 1.2.5 知，每个 G_n 是 F 的纯子模．因 $\{G_n|n\in N\}$是 F 的纯子模的链，故 $G=\bigcup G_n$ 也是 F 的纯子模. 由命题 1.2.5 知，F/G 是平坦模．

现在，考虑正合列

$$0\to G\to F\to F/G\to 0.$$

因 F/G 是平坦模，由(iii)知，F/G 是投射模，并由定理 1.1.1 知，序列是分裂正合的. 故 G 是 F 的直和项. 根据引理 1.7.13，Λ 的主右理想序列(6)是趋于平稳的.

(iv)⇒(v) 若 Λ 含有非零的无限正交幂等元集 e_1，e_2，$\cdots$，则

$$(1-e_1)\Lambda\supset(1-e_1-e_2)\Lambda\supset\cdots$$

是 Λ 的主右理想的严格逆降链. 这与题设相矛盾.

其次，设 $0\neq A$ 是任意右 Λ-模，任取 $0\neq x\in A$，若 $x\Lambda$ 没有单纯子模，则存在 $a_1\in\Lambda$，使得

$$x\Lambda\supset xa_1\Lambda\supset 0,$$

且 $xa_1\Lambda$ 没有单纯子模．这样继续下去，便得到 Λ 的元素序列 a_1，a_2，$\cdots$，使得

$$xa_1\Lambda\supset xa_1a_2\Lambda\supset\cdots.$$

因而得到 Λ 的主右理想的严格逆降链

$$a_1\Lambda\supset a_1a_2\Lambda\supset\cdots.$$

这与题设相矛盾，故 $x\Lambda$ 有单纯子模. 因此 $\mathrm{Soc}A\neq 0$.

(v)⇒(ii) 我们先证 J 是 T-幂零的．若 J 不是 T-幂零的，则有 J 的元素序列 a_1，a_2，…，使得 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，$\forall\ n\in N$．令 $\mathscr{S}=\{I\subseteq\Lambda_\Lambda \mid a_1a_2\cdots a_n\notin I,\ \forall\ n\}$，由 Zorn 引理知 $\mathscr{S}$ 必有一个极大元，设为 I．因 Λ/I 是非零右 Λ-模，由(v)知 $\mathrm{Soc}\Lambda/I\neq 0$．因此，存在 Λ 的一个右理想 K，使 $I\subset K\subset\Lambda_\Lambda$，且 K/I 是单纯模．由 I 的选取法知，必有一个自然数 n，使得 $a_1a_2\cdots a_n\in K$．因而 $a_1\cdots a_na_{n+1}\in K$．由于 K/I 是单纯模，$a_1a_2\cdots a_n$ 和 $a_1\cdots a_na_{n+1}$ 均生成它，因此存在 $\lambda\in\Lambda$，使得

$$a_1a_2\cdots a_n+I=(a_1\cdots a_na_{n+1}\lambda)+I.$$

故 $a_1\cdots a_n(1-a_{n+1}\lambda)\in I$．因 $a_{n+1}\in J$，由定理 1.6.7 知，$a_{n+1}\lambda$ 是拟正则的，即 $1-a_{n+1}\lambda$ 可逆．于是得 $a_1a_2\cdots a_n\in I$．这就导出矛盾，所以 J 是左 T-幂零的．

现在，证明 Λ/J 是半单环．因 J 是左 T-幂零的，故它也是诣零的．由命题 1.7.1 知，Λ/J 的任意幂等元可以模 J 提升．但 $\Lambda\simeq\mathrm{End}\Lambda_\Lambda$，根据(v)知，$\mathrm{End}\Lambda_\Lambda$ 没有非零的无限正交幂等元．故 Λ_Λ 的直和项满足升链条件．又由命题 1.7.14 知，Λ_Λ 是有限不可分模的直和．因此 Λ 含有完全、正交、本原幂等元集 $\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$．记 $\bar{e}_i=e_i+J$，根据命题 1.5.15，得

$$\Lambda/J=e_1\Lambda/J\oplus e_2\Lambda/J\oplus\cdots\oplus e_n\Lambda/J, \tag{7}$$

$\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \cdots,\ \bar{e}_n\}$ 是 Λ/J 的完全、正交、幂等元．由于 e_i 是 Λ 的本原幂等元，且 Λ/J 的幂等元可以模 J 提升，因此 $\bar{e}_i$ 也是 Λ/J 的本原幂等元．所以(7)式是 Λ/J 的一个不可分分解．

只需再证明 $e_i\Lambda/J$ 是右 Λ/J-单纯模．由(v)知 $\mathrm{Soc}(e_i\Lambda/J)_\Lambda\neq 0$．故 $e_i\Lambda/J$ 有一个非零单子模 I/J，它是 Λ/J 的极小右理想．若 $(I/J)^2=0$，则 I/J 是幂零右理想．由定理 1.6.7 知，$I/J\subseteq J(\Lambda/J)=0$．故 $I=J$．这就导出矛盾，故 $(I/J)^2\neq 0$，且 I/J 是 Λ/J 的极小右理想．因此 I/J 是 Λ/J 的直和项．从而也是 $e_i\Lambda/J$ 的直和项．这与 $e_i\Lambda/J$ 是不可分相矛盾，故 $e_i\Lambda/J$ 是单纯模．于是 Λ/J 是右半单纯的，也就是半单环．

第二章

同调维数

本章主要介绍一般环和模的同调维数，并且讨论同调维数$\leqslant 1$的环的结构性质.

2.1 模的投射维数和内射维数

投射维数是一类重要的经典维数，它的理论和方法具有十分重要的作用.

定义 设Λ是环，A是非零左Λ-模. 若在$\mathscr{C}_\Lambda^L$内存在一个正合列

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0, \tag{1}$$

其中每个P_i是投射模，并且不存在与(1)类型相同而项数较小的正合列，则称A的投射维数为n，记作$\mathrm{l.pd}_\Lambda A = n$.

如果不存在像(1)式的正合列，规定$\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\infty$. 如果$A=0$，规定$\mathrm{l.pd}_\Lambda A=-1$.

同样，可以定义右Λ-模的投射维数.

下面我们讨论左Λ-模的投射维数的性质，在不产生混淆情况下，用$\mathrm{pd}A$来表示$\mathrm{l.pd}_\Lambda A$.

定理 2.1.1 设A是左Λ-模，$n\geqslant 0$，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.pd}_\Lambda A \leqslant n$;

(ii) 若对任意左Λ-模的正合列

$$0 \to X \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0,$$

其中每个P_i是投射模，则X也是投射模；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, B)=0$, $\forall B\in\mathscr{C}_\Lambda^L$;

(iv) $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(A, B)=0$, $\forall B\in\mathscr{C}_\Lambda^L$, $k\geqslant n+1$;

(v) 若对任意左 Λ-模的正合列

$$0\to B'\to B\to B''\to 0,$$

则有正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B')\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B'')\to 0.$$

定理 2.1.2 设 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 是左 Λ-模的正合列,则

(i) 若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A'$, $\mathrm{l.pd}_\Lambda A$ 和 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''$中有两个是有限的,则第三个也是有限的. 并且,若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A'<\mathrm{l.pd}_\Lambda A$,必有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''=\mathrm{l.pd}_\Lambda A$;若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A<\mathrm{l.pd}_\Lambda A'$,必有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''=\mathrm{l.pd}_\Lambda A'+1$;若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\mathrm{l.pd}_\Lambda A'$,必有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda A+1$.

(ii) 若 A,A''是投射模,则 A'也是投射模;若 A 是投射模,A''不是投射模且 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''$有限,则 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A''=\mathrm{l.pd}_\Lambda A'+1$.

定理 2.1.3 设$\{A_i\in\mathscr{C}_\Lambda^L\mid i\in I\}$,则

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda(\oplus_{i\in I}A_i)=\operatorname*{Sup}_{i\in I}\mathrm{l.pd}_\Lambda A_i.$$

以上三个定理的证明可以参考文献[101]和[75].

设 Λ, Γ 是环,$\varphi:\Lambda\to\Gamma$ 是环同态. 若 A 是左 Γ-模,对任意 $\lambda\in\Lambda$,规定 $\lambda a=\varphi(\lambda)a$, $a\in A$,则 A 也是左 Λ-模.

下面讨论换环后,模的投射维数间的关系.

引理 2.1.4 设 φ: $\Lambda\to\Gamma$ 是环同态,A 是左 Γ-模. 若${}_\Gamma A$ 和${}_\Lambda\Gamma$ 是投射模,则${}_\Lambda A$ 也是投射模.

证明 因${}_\Gamma A$ 是投射模,它必是左 Γ-自由模的直和项,故${}_\Gamma\Gamma^{(I)}={}_\Gamma A\oplus A'$. 但${}_\Lambda\Gamma$ 是投射模,${}_\Lambda\Gamma^{(I)}$也是投射模,因此${}_\Lambda A$ 是投射模.

命题 2.1.5 设 φ: $\Lambda\to\Gamma$ 是环同态,${}_\Gamma A$ 是模,则

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant\mathrm{l.pd}_\Gamma A+\mathrm{l.pd}_\Lambda\Gamma.$$

证明 令 $\mathrm{l.pd}_\Gamma A=n$,对 n 作数学归纳法. 若 $n=0$,则${}_\Gamma A$ 是投射模,它是左 Γ-自由模 F 的直和项. 于是得

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda F=\mathrm{l.pd}_\Lambda\Gamma=\mathrm{l.pd}_\Gamma A+\mathrm{l.pd}_\Lambda\Gamma.$$

若 $n>0$,则有左 Γ-模的短正合列

$$0 \to K \to F \to A \to 0,$$

其中$_\Gamma F$ 是自由模. 又由定理 2.1.2 知,$\text{l.pd}_\Gamma K = n-1$. 根据归纳法假设，得

$$\text{l.pd}_\Lambda K \leqslant n-1+\text{pd}_\Lambda \Gamma.$$

另外,$\text{l.pd}_\Lambda F=\text{l.pd}_\Lambda \Gamma$ 是显然的. 再由定理 2.1.2,就得

$$\text{l.pd}_\Lambda A \leqslant n+\text{l.pd}_\Lambda \Gamma.$$

设 Λ 是环，I 是它的理想，则有环的自然同态 $\Lambda \to \Lambda/I$. 下面讨论对环作这种变换时，模的投射维数间的关系.

引理 2.1.6 若 I 是环 Λ 的理想，A 是投射左 Λ-模，则A/IA是投射左 Λ/I-模.

证明 若 F 是任意自由左 Λ-模，则显然 F/IF 是投射左 Λ/I-模. 由于 A 是投射模，它是一个自由左 Λ-模 F 的直和项，且A/IA也是投射左 Λ/I-模 F/IF 的一个直和项，因此 A/IA 是投射左 Λ/I-模.

设 Λ 是环，$0\neq\lambda\in\Lambda$. 若对任意 $x\in\Lambda$，$x\lambda=0$ 或 $\lambda x=0$，都有 $x=0$，则称 λ 为 Λ 的非零因子，也把 λ 叫做 Λ 的正则元. 若 $\lambda\Lambda=\Lambda\lambda$，则称 λ 为 Λ 的正规元. 显然，若 λ 是 Λ 的正规元，则 $\lambda\Lambda$ 和 $\Lambda\lambda$ 是 Λ 的理想，并且$(\lambda\Lambda)^n=\lambda^n\Lambda$.

定理 2.1.7 设 Λ 是环，λ 是 Λ 的一个正规、正则、非单位元，A 是左 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 若 $\text{l.pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda} A=n$,这里 $0\leqslant n<\infty$，则 $\text{l.pd}_\Lambda A=n+1$.

证明 因 $\lambda A=0$,A 不可能是自由 Λ-模的子模，故 $\text{l.pd}_\Lambda A\neq 0$. 对 n 作数学归纳法. 若 $n=0$，则 A 是一个自由左 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模 F 的直和项. 因此 $\text{l.pd}_\Lambda A\leqslant \text{l.pd}_\Lambda F=\text{l.pd}_\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda)$. 考虑正合列

$$0\to\Lambda\xrightarrow{\lambda}\Lambda\to\Lambda/\lambda\Lambda\to 0,$$

这里 $\lambda: x_1 \mapsto x\lambda$, $\forall\ x\in\Lambda$，则 $\text{l.pd}_\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda)\leqslant 1$. 因此 $0<\text{l.pd}_\Lambda A\leqslant 1$. 故 $\text{l.pd}_\Lambda A=1$.

若 $n=1$，于是得 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模的正合列

$$0\to K\to P\to A\to 0,$$

其中 K,P 皆是 $\Lambda/\lambda\Lambda$-投射模. 由上面的证明知 $\text{l.pd}_\Lambda K=\text{l.pd}_\Lambda F=1$，并由定理 2.1.2，得

$$0<\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A\leqslant 1+\mathrm{l.\,pd}_\Lambda K\leqslant 2.$$

如果 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=1$，考虑 Λ-模的正合列

$$0\to K'\to F\to A\to 0, \tag{2}$$

其中 F 是自由模，K'是 F 的子模. 因

$$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=1+\mathrm{l.\,pd}_\Lambda K'=1,$$

故 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda K'=0$. 因此 K'是投射 Λ-模. 但 $\lambda A=0$，因而 $\lambda F\subseteq K'$. 于是由正合列(2)得到 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模的短正合列

$$0\to K'/\lambda F\to F/\lambda F\to A\to 0.$$

并且，由引理 2.1.6 知，$F/\lambda F$ 是投射 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 因 $\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda}A=1$，故 $K'/\lambda F$ 是投射 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 这样，又可以得到 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模的分裂正合列

$$0\to\lambda F/\lambda K'\to K'/\lambda K'\to K'/\lambda F\to 0.$$

因此 $\lambda F/\lambda K'$也是投射 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 但是 $A\cong F/K'\cong\lambda F/\lambda K'$，因此 A 是投射 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 这与 $\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda}A=1$ 相矛盾，所以 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=2$.

最后，讨论 $n\geqslant 2$ 的情形. 先构造一个 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模的正合列 $0\to A_1\to F\to A\to 0$，其中 F 是自由 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 因 $\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda}A=n$，由定理 2.1.2 知，$\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda}(A_1)=n-1$. 又由归纳法假设，就得 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(A_1)=n$. 另一方面，$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda F\leqslant 1$. 因而 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A_1>\mathrm{l.\,pd}_\Lambda F$. 于是

$$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(A_1)+1=n+1.$$

定理得证.

设 A 是左 Λ-模，$\lambda\in\Lambda$. 若 $a\in A$ 且 $\lambda a=0$，有 $a=0$，则称 λ 关于模 A 是正则的.

定理 2.1.8 设 Λ 是环，$\lambda\in\Lambda$ 是正则、正规、非单位元，记 $I=\Lambda\lambda$. 若 A 是任意左 Λ-模，且 λ 关于 A 是正则的，则

$$\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda/I}(A/IA)\leqslant\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A.$$

证明 若 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=\infty$，结论显然是成立的. 假设 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=n<\infty$，对 n 作数学归纳法.

若 $n=0$，由引理 2.1.6 可知结论是成立的. 设 $n>0$，作 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\xrightarrow{\pi}A\to 0, \tag{3}$$

其中 F 是自由模. 由定理 2.1.2，得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K=n-1$. 因 K 是 F 的子模，λ 关于 K 是正则的，故由归纳法假设，可得 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IK)\leqslant n-1$. 另外，由上面的 Λ-模的正合列，可以诱导得到 Λ/I-模的正合列

$$0\to(K+IF)/IF\to F/IF\to A/IA\to 0. \tag{4}$$

并且，$(K+IF)/IF\cong K/K\cap IF$. 若 $x\in K\cap IF$，则 $x=\lambda y$, $y\in F$. 由(3)知，$\pi(x)=\lambda\pi(y)=0$. 因 λ 关于 A 是正则的，$\pi(y)=0$，故 $y\in K$. 于是得 $K\cap IF=IK$. 因此，由(4)得 Λ/I-模的正合列

$$0\to K/IK\to F/IF\to A/IA\to 0.$$

故 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A/IA\leqslant n$.

定理 2.1.9 设 Λ 是左 Noether 环，$\lambda\in\Lambda$ 是正则、正规元，且 $\lambda\in J(\Lambda)$，记 $I=\Lambda\lambda$. 若 A 是任意 f.g. 左 Λ-模，且 λ 关于 A 是正则的，则 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=\mathrm{l.pd}_\Lambda A$.

证明 若 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=\infty$，由定理 2.1.8 知，$\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\infty$. 假设 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=n<\infty$，对 n 作数学归纳法. 若 $n=0$，我们先假定 Λ/I-模 A/IA 是自由模，$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\cdots$, $\bar{a}_m\in A/IA$ 是它的基，这里 $a_i\in A$. 要证 A 是自由 Λ-模. 令 B 是由 a_1, a_2, $\cdots$, a_m 生成的 A 的子模，则 $A=B+IA$. 于是得

$$A/B=(B+IA)/B=I(A/B). \tag{5}$$

因 $\lambda\in J(\Lambda)$，故 $I=\lambda\Lambda\subseteq J(\Lambda)$，且 A/B 是有限生成的. 由 Nakayama 引理知，$A/B=0$. 故 $A=B$. 因此 A 由 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 生成. 其次，若 $\sum_{i=1}^m\lambda_ia_i=0$, $\lambda_i\in\Lambda$，则 $\sum_{i=1}^m\lambda_i\bar{a}_i=0$. 因 $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_m\}$ 是 Λ/I-模 A/IA 的基，故 $\lambda_i\in I=\lambda\Lambda$. 因此 $\lambda_i=\lambda\lambda_i'$.

$$\therefore\quad 0=\sum_{i=1}^m\lambda_ia_i=\sum_{i=1}^m(\lambda\lambda_i')a_i=\lambda\Big(\sum_{i=1}^m\lambda_i'a_i\Big).$$

由于 λ 关于 A 是正则的，因此 $\sum_{i=1}^m\lambda_i'a_i=0$. 重复上述讨论，又得 $\lambda_i'=\lambda\lambda_i''$，且 $\sum_{i=1}^m\lambda_i''a_i=0$. 如果 $\lambda_i\neq0$，就能得到一个左理想的升链

$$\Lambda\lambda_i\subseteq\Lambda\lambda_i'\subseteq\Lambda\lambda_i''\subseteq\cdots, \tag{6}$$

并且它是严格递升的. 比如 $\Lambda\lambda_i=\Lambda\lambda_i'$，于是存在 $\gamma\in\Lambda$ 使 $\lambda_i'=\gamma\lambda_i$. 因此，$\lambda\lambda_i'=\lambda\gamma\lambda_i$，即 $\lambda_i=\lambda\gamma\lambda_i$. 所以 $(1-\lambda\gamma)\lambda_i=0$. 但 $\lambda\in J(\Lambda)$，由定理 1.6.7 知，$1-\lambda\gamma$ 有逆元. 故 $\lambda_i=0$. 同样，(6)式中其它相邻两个左理想也是

不相等的. 这与 A 是左 Noether 环相矛盾，所以每个 $\lambda_i=0$. 故 A 是自由 Λ-模.

现在考虑 $n=0$ 时，A/IA 是投射 Λ/I-模. 作一个短正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{7}$$

其中 F 是自由左 Λ-模. 由(7)可以诱导得一个 Λ/I-模的短正合列

$$0\to K/IK\to F/IF\to A/IA\to 0, \tag{8}$$

且这个序列是分裂的.

$\therefore \quad F/IF\cong K/IK\oplus A/IA\cong B/IB,$

这里 $B=K\oplus A$. 因 B/IB 是 f. g. Λ/I-自由模，故由上面证明知，B 是自由 Λ-模. 所以 A 是投射 Λ-模.

其次，设 $n>0$，又作 Λ-模的短正合列(7)，其中 F 是自由模. 于是又得到正合列(8)，其中 F/IF 是自由 Λ/I-模. 因此，$\text{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IK)=n-1$. 并且，$\Lambda$-模 K 是有限生成的. 又因 K 是自由模的子模，λ 关于 K 也是正则的，故由归纳法假设得 $\text{l.pd}_\Lambda K=n-1$. 所以 $\text{l.pd}_\Lambda A=n$.

最后，我们再给出一个关于模的投射维数的换环定理.

引理 2.1.10 设 I 是环 Λ 的理想，A 是左 Λ-模，若 A 是投射模，则 $\text{l.pd}_\Lambda IA\leqslant \text{l.pd}_\Lambda I$.

证明 因 A 是投射模，故存在模 B，使 $A\oplus B$ 是自由模. 因此 $IA\oplus IB\cong I^{(X)}$. 由定理 2.1.3，得 $\text{l.pd}_\Lambda IA\leqslant \text{l.pd}_\Lambda I$.

定理 2.1.11 设 I 是环 Λ 的理想，I 是投射左 Λ-模，并且对某个 n 有 $I^n=I^{n+1}$，则对任意左 Λ/I-模 A，必有

$$\text{l.pd}_{\Lambda/I}A\leqslant \text{l.pd}_\Lambda A+2(n-1).$$

证明 显然，我们可以假定 $\text{l.pd}_\Lambda A=m<\infty$.

若 $m=0$，由引理 2.1.6 知，A/IA 是投射 Λ/I-模. 因而 A 是投射 Λ/I-模. 故 $\text{l.pd}_{\Lambda/I}A=0$.

若 $m>0$，对 m 作数学归纳法. 首先，有左 Λ-模的短正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{9}$$

其中 F 是自由模，K 是 F 的子模. 因 $IA=0$，故 $IF\subseteq K$. 于是得

$$F\supseteq K\supseteq IF\supseteq I^2F\supseteq\cdots.$$

因 $F/K \cong A$，故 Λ/I-模序列

$$0 \to K/IF \to F/IF \to A \to 0 \tag{10}$$

是正合的. 继续这样下去，必得到一个长正合列

$$0 \to I^{n-1}K/I^nK \to \cdots \to IK/I^2K \to IF/I^2F \to K/IK \to F/IF \to A \to 0. \tag{11}$$

由于 $I^nF = I^{n+1}F$，故其左端为零. 如果 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A = 1$，由(9)知 K 是投射 Λ-模. 根据引理 2.1.10 知，IF 和 IK 是投射 Λ-模. 因而，易知对每个 $i > 1$，I^iK 和 I^iF 也是投射 Λ-模. 又由引理 2.1.6，对于每个 i，$I^iF/I^{i+1}F$ 和 $I^iK/I^{i+1}K$ 是投射 Λ/I-模. 故(11)是 Λ/I-模 A 的一个投射分解，于是 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A \leqslant 2n-1$.

最后，假定 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A = m > 1$. 因 I 是投射 Λ-模，故 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(F/IF) = \mathrm{l.pd}_\Lambda(\Lambda/I) \leqslant 1$. 由于(10)也是 Λ-模的正合列，根据定理 2.1.2，得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(K/IF) = m-1$. 再由归纳法假设，有

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IF) \leqslant m-1+2n-2 = \mathrm{l.pd}_\Lambda A + 2n - 3.$$

但是，$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(F/IF) = 0$，并由正合序列(10)，得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A \leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IF) + 1 \leqslant \mathrm{l.pd}_\Lambda A + 2(n-1).$$

在定理 2.1.11 中，若理想 I 是平坦模，则可以得到一个十分类似的结果. 在 2.2 节，我们将进一步讨论这个问题.

下面介绍模的内射维数，内射维数是与投射维数相对偶的.

定义 设 Λ 是环，A 是非零左 Λ-模. 若在 $\mathscr{C}^L_\Lambda$ 内存在一个正合列

$$0 \to A \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_n \to 0, \tag{12}$$

其中每个 Q_i 是内射模，并且，不存在与(12)类型相同而项数较小的正合列，则称 A 的内射维数为 n，记作 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A = n$.

如果不存在像(12)式的正合列，规定 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A = \infty$. 如果 $A = 0$，规定 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A = -1$.

为简便起见，有时用 $\mathrm{Id}A$ 表示 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A$.

关于模的内射维数，与投射维数平行的有以下定理.

定理 2.1.1′ 设 A 是左 Λ-模，$n \geqslant 0$，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.Id}_\Lambda A \leqslant n$；

(ii) 若对任意左 Λ-模的正合列

$$0 \to A \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_{n-1} \to Y \to 0,$$

其中每个 Q_i 是内射模，则 Y 也是内射模；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B, A) = 0, \forall\ B \in \mathscr{C}_\Lambda^L$；

(iv) $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(B, A) = 0,\ \forall\ B \in \mathscr{C}_\Lambda^L,\ k \geqslant n+1$；

(v) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I, A) = 0$，$I$ 是 Λ 的任意左理想；

(vi) 若对任意左 Λ-模的正合列

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0,$$

则有正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B'', A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^n(B, A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^n(B', A) \to 0.$$

定理 2.1.2′ 设 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 是左 Λ-模的正合列，则

(i) 若 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A'$，$\mathrm{l.Id}_\Lambda A$ 和 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A''$ 中有两个是有限的，则第三个也是有限的．并且，若 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A'' < \mathrm{l.Id}_\Lambda A$，必有 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A' = \mathrm{l.Id}_\Lambda A$；若 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A'' > \mathrm{l.Id}_\Lambda A$，必有 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A' = \mathrm{l.Id}_\Lambda A'' + 1$；若 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A'' = \mathrm{l.Id}_\Lambda A$，必有 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A' \leqslant \mathrm{l.Id}_\Lambda A + 1$.

(ii) 若 A，A' 是内射模，A'' 也是内射模. 若 A 是内射模，A'' 不是内射模且 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A''$ 有限时，$\mathrm{l.Id}_\Lambda A' = \mathrm{l.Id}_\Lambda A'' + 1$.

定理 2.1.3′ 设 $\{A_i \in \mathscr{C}_\Lambda^L \mid i \in I\}$，则

$$\mathrm{l.Id}_\Lambda\Big(\prod_{i \in I} A_i\Big) = \sup_{i \in I} \mathrm{l.Id}_\Lambda A_i.$$

关于换环定理对偶地有

定理 2.1.7′ 设 Λ 是环，λ 是 Λ 的一个正规、正则、非单位元，A 是左 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模. 若 $\mathrm{l.Id}_{\Lambda/\lambda\Lambda} A = n$，这里 $0 \leqslant n < \infty$，则 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A = n+1$.

定理 2.1.8′ 设 Λ 是环，λ 是 Λ 的一个正规、正则、非单位元，记 $I = \Lambda\lambda$. 若 A 是任意左 Λ-模，且 λ 关于 A 是正则的，则

$$\mathrm{l.Id}_{\Lambda/I}(A/IA) \leqslant \mathrm{l.Id}_\Lambda A.$$

2.2 模的平坦维数

平坦维数的理论与投射维数的理论几乎完全是平行的，它是由模的平坦分解和函子 Tor 决定的．

定义 设 Λ 是环，A 是非零左 Λ-模．若在 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 内存在一个正合列

$$0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0, \tag{1}$$

其中每个 F_i 是平坦模，并且不存在与(1)类型相同而项数较小的正合列，则称 A 的平坦维数为 n，记作 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=n$，或简记为 $\mathrm{fd}A=n$.

如果不存在像(1)式的正合列，规定 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\infty$. 如果 $A=0$，规定 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=-1$.

定理 2.2.1 设 A 是左 Λ-模，$n\geqslant 0$，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.fd}_\Lambda A\leqslant n$；

(ii) 对任意左 Λ-模的正合列

$$0\to X\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是平坦模，则 X 也是平坦模；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A)=0,\forall\ B\in\mathscr{C}_\Lambda^R$；

(iv) $\mathrm{Tor}_k^\Lambda(B,A)=0,\forall\ B\in\mathscr{C}_\Lambda^R,k\geqslant n+1$；

(v) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)=0$，$I$ 是 Λ 的任意右理想；

(vi) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)=0$，$I$ 是 Λ 的任意 f.g. 右理想．

定理 2.2.1 的证明可参考文献[75]和[101].

定理 2.2.2 设 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 是左 Λ-模的正合列，则

(i) 若 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A'$，$\mathrm{l.fd}_\Lambda A$ 和 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$ 中两个是有限的，则第三个也是有限的．并且，若 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A>\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$，必有 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A'=\mathrm{l.fd}_\Lambda A$；若 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A<\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$，必有 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A''=\mathrm{l.fd}_\Lambda A'+1$；若 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$，必有 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A'\leqslant\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$.

(ii) 若 A,A'' 是平坦模，则 A' 也是平坦模；若 A 是平坦模，A'' 不是平坦模且 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$ 有限，则 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A''=\mathrm{l.fd}_\Lambda A'+1$.

证明 (i) 对任意右 Λ-模 B，任意 $n\geqslant 0$，有正合列

$$\begin{aligned}\cdots&\to\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A')\to\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A'')\\&\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A')\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A)\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A'')\to\cdots.\end{aligned}\tag{2}$$

如果 $m\geqslant n$ 时，$\mathrm{Tor}_m^\Lambda(B,A'')=0$，$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A)\neq 0$，由(2)可得

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A')\cong\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A)\neq 0,$$

$$\mathrm{Tor}_{n+j}^\Lambda(B,A')\cong\mathrm{Tor}_{n+j}^\Lambda(B,A),\forall\ j>0.$$

故 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A''<\mathrm{l.fd}_\Lambda A<\infty$ 时，$\mathrm{l.fd}_\Lambda A'=\mathrm{l.fd}_\Lambda A$.

如果 $m\geqslant n$ 时，$\mathrm{Tor}_m^\Lambda(B,A)=0$，$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B,A'')\neq 0$，由(2)可得

$$\mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda(B,A')\neq 0,\ \mathrm{Tor}_{n+j}^\Lambda(B,A')\cong\mathrm{Tor}_{n+j+1}^\Lambda(B,A''),\ \forall\ j\geqslant 0.$$

故 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A<\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$ 时，$\mathrm{l.fd}_\Lambda A''=\mathrm{l.fd}_\Lambda A'+1$.

如果 $m\geqslant n$ 时，$\mathrm{Tor}_m^\Lambda(B,A)=\mathrm{Tor}_m^\Lambda(B,A'')=0$，由(2)可得 $\mathrm{Tor}_m^\Lambda(B,A')=0$. 故 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.fd}_\Lambda A''<\infty$ 时，$\mathrm{l.fd}_\Lambda A'\leqslant\mathrm{l.fd}_\Lambda A''$.

(ii) 由(i)可以直接推得(ii).

定理 2.2.3 设 $\{A_i\in\mathscr{C}_\Lambda^L\mid i\in I\}$，则 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(\bigoplus_{i\in I}A_i)=\operatorname*{Sup}_{i\in I}\mathrm{l.fd}_\Lambda A_i$.

类似定理 2.1.3，我们省去这个定理的证明.

下面我们讨论 2.1 节中提出的问题.

引理 2.2.4 设 I 是环 Λ 的理想，且 I 是平坦右 Λ-模，则对任意左 Λ-模 A，若 A 是自由模的子模，必有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda IA\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda A+\mathrm{l.pd}_\Lambda I$.

证明 若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\infty$，结论成立是显然的. 假定 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=n<\infty$，对 n 作数学归纳法. 若 A 是投射模，则由引理 2.1.10 知结论已成立. 若 A 不是投射模，则得 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{3}$$

这里 F 是自由模. 因而 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K=\mathrm{l.pd}_\Lambda A-1$，并由归纳法假设，得

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda IK\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda K+\mathrm{l.pd}_\Lambda I.$$

因 I 是平坦模，故由(3)式得正合列

$$0\to I\otimes_\Lambda K\to I\otimes_\Lambda F\to I\otimes_\Lambda A\to 0. \tag{4}$$

因 F 是自由模，故 $I\otimes_\Lambda F\cong IF$. 又由于 K，A 是自由模的子模，因此有 $I\otimes_\Lambda K\cong IK$ 和 $I\otimes_\Lambda A\cong IA$. 于是(4)式变为正合列

$$0\to IK\to IF\to IA\to 0.$$

因 $\mathrm{l.pd}_\Lambda IF=\mathrm{l.pd}_\Lambda I$，$\mathrm{l.pd}_\Lambda IK\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda K+\mathrm{l.pd}_\Lambda I$，故由定理 2.1.2 得

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda IA\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda K+\mathrm{l.pd}_\Lambda I+1=\mathrm{l.pd}_\Lambda A+\mathrm{l.pd}_\Lambda I.$$

命题 2.2.5 设 I 是环 Λ 的理想，A 是左 Λ-模. 若 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I,A)=0,\forall\ n>0$，则 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda A$.

证明 仅需讨论 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=m<\infty$，并对 m 作数学归纳法. 如果 A 是投射模，由引理 2.1.6 知，A/IA 是投射 Λ/I-模. 假定 $m>0$，作 Λ-

模的正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{5}$$

其中 F 是自由模. 因此 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K=m-1$. 由(5)得正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_{m+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)\to\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,K)\to\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,F)$$
$$\to\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,A)\to\cdots.$$

因 $\mathrm{Tor}_{m+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)=\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,F)=0$,故 $\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,K)=0,\forall\ m>0$. 由归纳法假设，得

$$m-1=\mathrm{l.pd}_\Lambda K\geqslant\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IK).$$

又因 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I,A)=0$,故得正合列

$$0\to\Lambda/I\otimes_\Lambda K\to\Lambda/I\otimes_\Lambda F\to\Lambda/I\otimes_\Lambda A\to 0.$$

基于 $\Lambda/I\otimes_\Lambda K\cong K/IK$,$\Lambda/I\otimes_\Lambda F\cong F/IF$ 和 $\Lambda/I\otimes_\Lambda A\cong A/IA$,又得正合列

$$0\to K/IK\to F/IF\to A/IA\to 0.$$

因 F/IF 是自由左 Λ/I-模，故

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)\leqslant\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IK)+1\leqslant m.$$

定理 2.2.6 设 I 是环 Λ 的理想, I 是平坦右 Λ-模,且对某个 n 有 $I^n=I^{n+1}$，则对任意左 Λ/I-模 A，必有

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A\leqslant\mathrm{l.pd}_\Lambda A+(n-1)\mathrm{l.pd}_\Lambda I+2(n-1).$$

证明 考虑右 Λ-模的正合列

$$0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0.$$

因 $I_\Lambda,\Lambda_\Lambda$ 是平坦模,故 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant 1$. 再由定理 2.1.2 知，对任意左 Λ-模 B，皆有

$$\mathrm{Tor}_{m+1}^\Lambda(\Lambda/I,B)=0,\forall\ m>0. \tag{6}$$

如果 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=0$，由引理 2.1.6 知 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=0$. 故结论成立.

如果 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\neq 0$，作 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{7}$$

其中 F 是自由模. 因 $I^n=I^{n+1}$，仿照定理 2.1.11 的证明，可以得到 Λ/I-模的正合列

$$0\to I^{n-1}K/I^nK\to\cdots\to IK/I^2K\to IF/I^2F$$

$$\to K/IK \to F/IF \to A \to 0. \tag{8}$$

在(6)式中取 $B=F/K$，得 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m+1}(\Lambda/I,F/K)=0$. 又由正合列(7)知，$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m}(\Lambda/I,K)=0,\forall\ m>0$. 根据命题 2.2.5，得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K/IK)\leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda}K.$$

又取 $B=F/I^{i-1}K$，类似地可以得 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m}(\Lambda/I,I^{i-1}K)=0,\forall\ m>0$. 再根据命题 2.2.5，又得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(I^{i-1}K/I^{i}K)\leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda}(I^{i-1}K).$$

因 $I^{i-1}K$ 是自由模 F 的子模，故由引理 2.2.4 得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(I^{i-1}K)\leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda}K+(i-1)\mathrm{l.pd}_{\Lambda}I.$$

类似地有

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(I^{i-1}F)\leqslant (i-1)\mathrm{l.pd}_{\Lambda}I.$$

因此若正合序列(8)分解为短正合列，则由定理 2.1.2 便得到

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A\leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda}K+(n-1)\mathrm{l.pd}_{\Lambda}I+2n-1.$$

但是 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}A-1$，代入上式得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}A\leqslant \mathrm{l.pd}_{\Lambda}A+(n-1)\mathrm{l.pd}_{\Lambda}I+2(n-1).$$

最后，我们讨论单模的平坦维数和内射维数的关系.

定理 2.2.7 设 Λ 是环，I 是它的理想. 若 Λ/I 是半单环，则

$$\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I)=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/I) \text{ 和 } \mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I)=\mathrm{r.Id}_{\Lambda}(\Lambda/I).$$

证明 设 $\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I)=n<\infty$，令 $(\Lambda/I)^{*}=\mathrm{Hom}_{Z}(\Lambda/I,Q/Z)$，这里 Q 是有理数环，Z 是整数环. 把 Λ/I 视为左 Λ-模，则 $(\Lambda/I)^{*}$ 是右 Λ-模. 由于 Q/Z 是内射 Z-模，因此对任意左 Λ-模 A，必有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(A,\mathrm{Hom}_{Z}((\Lambda/I)^{*},Q/Z))\\&\cong \mathrm{Hom}_{Z}(\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}((\Lambda/I)^{*},A),Q/Z).\end{aligned} \tag{9}$$

但 $(\Lambda/I)^{*}I=0$，故 $(\Lambda/I)^{*}$ 是半单纯右 Λ-模，$(\Lambda/I)^{*}\cong\bigoplus_{\alpha\in\Omega}S_{\alpha}$，这里每个 S_{α} 是单纯右 Λ-模. 由于 S_{α} 是 Λ/I 的直和项和 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(\Lambda/I,A)=0$，因此得

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(S_{\alpha},A)=0,\forall\ \alpha\in\Omega.$$

所以 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}((\Lambda/I)^{*},A)=0$，并由(9)式得

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(A,\mathrm{Hom}_{Z}((\Lambda/I)^{*},Q/Z))=\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(A,(\Lambda/I)^{**})=0. \tag{10}$$

因 Q/Z 是内射余生成元，故 Λ/I 必同构于 $(\Lambda/I)^{**}$ 的一个子模．同时，$I(\Lambda/I)^{**}=0$，$(\Lambda/I)^{**}$ 也是半单纯模．因此 Λ/I 是 $(\Lambda/I)^{**}$ 的直和项．于是由(10)得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/I)=0$．故 $\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant n$.

反过来，设 $\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/I)=n<\infty$，对任意左 Λ-模 A，必有

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/I,Q/Z))\cong\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A),Q/Z), \tag{11}$$

这里 Λ/I 是右 Λ-模．因 $(\Lambda/I)^*=\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/I,Q/Z)$ 是半单纯模，故 $(\Lambda/I)^*\cong\bigoplus_{\alpha\in\Omega}S_\alpha$，这里每个 S_α 是单纯左 Λ-模．又因 $\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/I)=n$，$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/I)=0$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,S_\alpha)=0$，$\forall\ \alpha\in\Omega$．于是得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\prod_{\alpha\in\Omega}S_\alpha)\cong\prod_{\alpha\in\Omega}\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,S_\alpha)=0.$$

由于 $\prod_{\alpha\in\Omega}S_\alpha$ 也是半单纯模，因此 $\bigoplus_{\alpha\in\Omega}S_\alpha$ 是 $\prod_{\alpha\in\Omega}S_\alpha$ 的直和项．于是 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/I,Q/Z))=0$. 又由(11)可得

$$\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A),Q/Z)=0 \text{ 和 } \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)=0.$$

故 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant n$.

综合以上讨论知 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)=\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/I)$.

类似地，有 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(\Lambda/I)=\mathrm{r.Id}_\Lambda(\Lambda/I)$.

推论 2.2.8 设 Λ 是半局部环，则 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)$，$\mathrm{l.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{r.Id}_\Lambda(\Lambda/J)$，这里 J 是环 Λ 的 Jacobson 根．

推论 2.2.9 设 Λ 是交换环．则任意单纯 Λ-模的平坦维数等于它的内射维数．

推论 2.2.10 设 Λ 是交换环，则单纯 Λ-模 S 是平坦的当且仅当 S 是内射的．

定义 设 Λ 是环，若每个单纯右 Λ-模是平坦模，则称 Λ 为右 SF-环．若每个单纯左 Λ-模是内射模，则称 Λ 为左 V-环．

推论 2.2.11 设 Λ 是半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是右 SF-环；

(ii) Λ 是左 V-环；

(iii) Λ 是半单环；

(iv) J 是内射左 Λ-模，这里 J 是 Λ 的 Jacobson 根．

证明 (i)⇔(ii) 由推论 2.2.8 知成立是显然的.

(ii)⇒(iii) 因 Λ 是左 V-环, 则 $J=0$. 故 Λ 是半单环.

(iii)⇒(ii)和(ii)⇒(iv)成立是显然的.

(iv)⇒(iii) 由正合列 $0\to J\to\Lambda\to\Lambda/J\to 0$ 和 J 是内射模, 得 $\Lambda\cong J\oplus\Lambda/J$. 但 J 是多余子模,于是得 $J=0$. 故 Λ 是半单环.

我们还可以把定理 2.2.7 给予推广.

定理 2.2.12 设 Λ,Γ 是交换环,$\varphi:\Lambda\to\Gamma$ 是环同态,E 是模范畴 $\mathscr{C}_\Gamma$ 的内射余生成元,则 $\mathrm{fd}_\Lambda\Gamma=\mathrm{Id}_\Lambda E$.

证明 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,E)&\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma,E))\\&\cong\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Gamma),E),\end{aligned}$$

这里 A 是任意 Λ-模, 且 E 是 $\mathscr{C}_\Gamma$ 的内射余生成元,因此 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,E)=0\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Gamma)=0$. 于是得 $\mathrm{Id}_\Lambda E=\mathrm{fd}_\Lambda\Gamma$.

推论 2.2.13 设 $\varphi:\Lambda\to\Gamma$ 是环同态,Γ 是 $\mathscr{C}_\Gamma$ 的内射余生成元,则 $\mathrm{fd}_\Lambda\Gamma=\mathrm{Id}_\Lambda\Gamma$.

2.3 环的整体维数和弱整体维数

本节应用模的维数定义环的几类维数.

定义 设 Λ 是环. 令

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\underset{A}{\mathrm{Sup.}}\,\mathrm{l.pd}_\Lambda A,\forall\ A\in\mathscr{C}_\Lambda^L,$$

$$\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\underset{A}{\mathrm{Sup.}}\,\mathrm{l.pd}_\Lambda A,\forall\ A\in\mathscr{C}_\Lambda^R.$$

把 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda$ 和 $\mathrm{r.gl.dim}\Lambda$ 分别叫做环 Λ 的左整体维数和右整体维数.

环的左、右整体维数并不一定相等. 如果相等, 这时其左、右整体维数的值称为整体维数, 记为 $\mathrm{gl.dim}\Lambda$.

对于平坦维数,由定理 2.2.1,得

$$\underset{A\in\mathscr{C}_\Lambda^L}{\mathrm{Sup.}}\,\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\underset{B\in\mathscr{C}_\Lambda^R}{\mathrm{Sup.}}\,\mathrm{r.fd}_\Lambda B.$$

定义 设 Λ 是环, 把$\underset{A\in\mathscr{C}_\Lambda^L}{\mathrm{Sup.}}\,\mathrm{l.fd}_\Lambda A$ 和$\underset{B\in\mathscr{C}_\Lambda^R}{\mathrm{Sup.}}\,r.\mathrm{fd}_\Lambda B$ 的公共值叫做环

Λ 的弱整维数，记作 W. gl. dimΛ.

由定义知，W. gl. dim$\Lambda \leqslant \min\{$l. gl. dimΛ, r. gl. dim$\Lambda\}$.

定理 2.3.1 设 Λ 是环，$n(\geqslant 0)$是整数，则下列陈述是等价的：

(i) l. gl. dim$\Lambda \leqslant n$;

(ii) pd$A \leqslant n$，A 是任意 f. g. 左 Λ-模；

(iii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)=0$，$\forall\ A,B\in \mathscr{C}_{\Lambda}^{L}$;

(iv) l. pd$(\Lambda/I)\leqslant n$，I 是环 Λ 的任意左理想；

(v) Id$A\leqslant n$，$\forall\ A\in \mathscr{C}_{\Lambda}^{L}$.

定理 2.3.2 设 Λ 是环，$n(\geqslant 0)$是整数，则下列陈述是等价的：

(i) W. gl. dim$\Lambda\leqslant n$;

(ii) $\mathrm{Tor}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)=0$，$\forall\ A\in \mathscr{C}_{\Lambda}^{R}, B\in \mathscr{C}_{\Lambda}^{L}$;

(iii) fd$(\Lambda/I)\leqslant n$，I 是 Λ 的任意左理想；

(iv) fd$(\Lambda/I)\leqslant n$，I 是 Λ 的任意 f. g. 左理想．

显然，定理 2.3.2(iii)，(iv)中，取 I 是 Λ 的任意(f. g.)右理想也成立．

以上两个定理的证明可以参考文献[101]和[75].

下面，介绍一些换环定理．

定理 2.3.3 设 Λ 是环，λ 是 Λ 的一个正规、正则、非单位元．若 l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)<\infty$，则 l. gl. dim$\Lambda\geqslant$l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)+1$.

证明 由定理 2.1.7 可直接推得．

定理 2.3.4 设 Λ 是左 Noether 环，$\lambda\in\Lambda$ 是正则、正规元，且 $\lambda\in J(\Lambda)$．若 l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)<\infty$，则 l. gl. dim$\Lambda=$l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)+1$.

证明 由定理 2.3.3，得 l. gl. dim$\Lambda\geqslant$l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)+1$. 反过来，设 A 是任意 f. g. 左 Λ-模，记 $n=$l. gl. dim$(\Lambda/\lambda\Lambda)$. 如果 pd$A\leqslant 1$，显然 pd$A\leqslant n+1$. 如果 pd$A>1$，作正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是具有有限基的自由左 Λ-模．因 Λ 是左 Noether 环，故 K 是 f. g. 的. 由定理 2.1.9 知，$\mathrm{pd}_{\Lambda}K=\mathrm{pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda}(K/\lambda K)\leqslant n$. 于是由定理 2.1.2，得 pd$A\leqslant n+1$. 又由定理 2.3.1，得 l. gl. dim$\Lambda\leqslant n+1$.

定理 2.3.5 设 I 是环 Λ 的理想，I 是投射左 Λ-模，且对某个 n 有 $I^{n}=I^{n+1}$，则 l. gl. dim$(\Lambda/I)\leqslant$l. gl. dim$\Lambda+2(n-1)$.

证明 由定理 2.1.11 可直接推得.

定理 2.3.6 设 I 是环 Λ 的理想, I 是平坦右 Λ-模, 且对某个 n 有 $I^n = I^{n+1}$, 则 $\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I) \leqslant \mathrm{l.gl.dim}\Lambda + (n-1)\mathrm{l.pd}_\Lambda I + 2(n-1)$.

证明 由定理 2.2.6 可直接推得.

现在, 介绍文献[79]中的换环定理.

定理 2.3.7 设 I 是环 Λ 的一个理想, 若

(i) I 是幂零的,

或

(ii) Λ 是左 Noether 环和 $I \subseteq J(\Lambda)$,

则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda \leqslant \mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I) + \mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I).$$

首先, 我们证明一个命题.

命题 2.3.8 设 I 是环 Λ 的一个幂零理想, A 是左 Λ-模. 若 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I, A) = 0, \forall\, n > 0$, 则 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA)$.

证明 如果 $\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA) = \infty$, 由命题 2.2.5 知, $\mathrm{pd}_\Lambda A = \infty$. 假定 $\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA) = n < \infty$, 则对 n 作数学归纳法. 我们先假定 A/IA 是自由左 Λ/I-模, 且 $\{\bar{a}_i \in A/IA \mid i \in X\}$ 是它的基. 令 $B = \sum_i \Lambda a_i$, 则 $B + IA = A, I(A/B) = A/B$. 又因 I 是幂零的, 故 $A/B = 0$, 即 $A = B$. 令 F 是自由左 Λ-模, $\{e_i \mid i \in X\}$ 是它的基. 定义 $\varphi: F \to A$ 使 $\varphi(e_i) = a_i$, $\forall\, i$. 于是得正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0. \tag{1}$$

因 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I, A) = 0$, 故由正合列(1)诱导得正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda/I \otimes_\Lambda K \longrightarrow \Lambda/I \otimes_\Lambda F \xrightarrow{1_{\Lambda/I} \otimes \varphi} \Lambda/I \otimes_\Lambda A \longrightarrow 0.$$

但 $1_{\Lambda/I} \otimes \varphi$ 是 Λ/I 一同构, 故 $\Lambda/I \otimes_\Lambda K = K/IK = 0$, 即 $K = IK$. 又因 I 是幂零的, 故 $K = 0$. 这样便知 A 是自由模.

其次, 完全仿照定理 2.1.9 的证明, 便得到

$$\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA).$$

推论 2.3.9 设 Λ 是左 Noether 环, I 是 Λ 的理想且 $I \subseteq J(\Lambda)$, A 是 f.g. 左 Λ-模. 若 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I, A) = 0, \forall\, n > 0$, 则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA).$$

现在我们证明定理 2.3.7.

证明 (i)设 A 是任意左 Λ-模，且 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)=n<\infty$，作一个左 Λ-模的正合列

$$0\to X_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0, \tag{2}$$

其中每个 F_i 是自由模．由(2)式得

$$\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,X_n)\cong\mathrm{Tor}_{n+m}^\Lambda(\Lambda/I,A),\forall\ m>0.$$

由于 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)=n$，因此 $0=\mathrm{Tor}_{n+m}^\Lambda(\Lambda/I,A)=\mathrm{Tor}_m^\Lambda(\Lambda/I,X_n)$. 这样，$X_n$ 就满足命题 2.3.8 的条件. 于是

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda X_n=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(X_n/IX_n)\leqslant\mathrm{l.gl.dim}\Lambda/I.$$

$\therefore\quad \mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)+n.$

(ii)设 A 是任意 f.g. 左 Λ-模，$\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)=n<\infty$，作一个左 Λ-模的正合列

$$0\to X_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是自由模，且 F_0 是 f.g. 的. 因 Λ 是左 Noether 环，故 F_i 和 X_n 也是 f.g. 的，$i=1,2,\cdots,n-1$. 再仿照(i)的证明，由推论 2.3.9 便得到

$$\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)+n.$$

综合以上讨论，得 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)+\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)$.

定理 2.3.7 中，(i)就是 Small 定理．1973 年 Sandomierski 又推广了 Small 定理．

定理 2.3.10(Sandomierski) 设 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 是环 Λ 的理想，且 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$是左 T-幂零的，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant\sup_i\{\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I_i)+\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I_i)\}.$$

证明见文献[77].

现在介绍环扩张的一个著名维数公式.

定理 2.3.11 设 K 是一个域，$K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是 K 上的未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环，则 $\mathrm{l.gl.dim}K[x_1,x_2,\cdots,x_n]=n$.

这个定理就是著名的 Hilbert's Syzygy 定理．在同调代数著作中，

都给出了这个定理的详细证明，我们就不再重复叙述了．若 Λ 是任意环，Hilbert's syzygy 定理就成为：

$$\text{l.gl.dim}\Lambda[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\text{l.gl.dim}\Lambda+n.$$

最后,我们应用同调维数来刻划一些重要的环类．

定理 2.3.12 设 Λ 是环,则 Λ 是半单的$\Leftrightarrow$l.gl.dim$\Lambda=0$.

证明 若 Λ 是半单环，则由定理 1.5.18 知，每个非零左 Λ-模皆是投射模．故 l.gl.dim$\Lambda=0$.

反过来，若 l.gl.dim$\Lambda=0$，则由定义知每个左 Λ-模是投射模．因此 Λ 是半单环．

定理 2.3.13 设 Λ 是环，则 l.gl.dim$\Lambda\leqslant 1\Leftrightarrow\Lambda$ 是左遗传环．

证明 若 l.gl.dim$\Lambda\leqslant 1$，设 I 是 Λ 的任意左理想，则得 l.pd$(\Lambda/I)\leqslant 1$．考虑左 Λ-模的正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$，由定理 2.1.2，得

$$\text{l.pd}I\leqslant\text{l.pd}(\Lambda/I)-1\leqslant 0.$$

故 I 是投射左 Λ-模．因此 Λ 是左遗传环．

反过来，若 Λ 是左遗传环，则对于 Λ 的任意左理想 I 都是投射模．所以 l.pd$(\Lambda/I)\leqslant 1$．由定理 2.3.1，得 l.gl.dim$\Lambda\leqslant 1$.

定理 2.3.14 设 Λ 是环，则 Λ 是 VN 正则环$\Leftrightarrow$W.gl.dim$\Lambda=0$.

证明 若 Λ 是 VN 正则环，则由定理 1.4.13 知，每个左 Λ-模 A 是平坦模，即 l.fd$A=0$．故 W.gl.dim$\Lambda=0$.

反过来，若 W.gl.dim$\Lambda=0$，则由定义知对任意非零左 Λ-模 A，l.fd$A=0$，即 A 是平坦模．故 Λ 是 VN 正则环．

定理 2.3.15 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) W.gl.dim$\Lambda\leqslant 1$；

(ii) Λ 的每个左理想是平坦模；

(iii) Λ 的每个右理想是平坦模；

(iv) $\text{Tor}_2^\Lambda(A,B)=0,\forall A\in\mathscr{C}_\Lambda^R,B\in\mathscr{C}_\Lambda^L$.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(iv) 由定理 2.3.2 知结论是成立的．

(i)$\Leftrightarrow$(ii) 由定理 2.3.2,得 W.gl.dim$\Lambda=\operatorname{Sup}_I\{\text{l.fd}(\Lambda/I)\mid I$ 是 Λ 的任意左理想$\}$．又因有左 Λ-模的正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$，且${}_\Lambda\Lambda$ 是

平坦模，由定理 2.2.2，得 $\mathrm{l.fd}(\Lambda/I)\leqslant \mathrm{l.fd}I+1$. 于是对 Λ 的任意左理想 I，$\mathrm{l.fd}(\Lambda/I)\leqslant 1$ 当且仅当 $\mathrm{l.fd}I=0$，即 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$ 当且仅当 Λ 的每个左理想是平坦模.

(i)⇔(iii) 用类似方法便知结论是成立的.

由定理 2.3.15 可直接得到下面的推论.

推论 2.3.16 设 Λ 是环，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$ 当且仅当每个平坦模的子模是平坦的.

定理 2.3.17 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左半遗传环；

(ii) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$，并且，$\Lambda$ 是左凝聚环.

证明 (i)⇒(ii) 设 I 是 Λ 的任意左理想，则 $I=\varinjlim I_k$，I_k 是 ${}_\Lambda I$ 的任意 f.g. 子模. 因 Λ 是左半遗传环，故每个 I_k 是投射模. 从而是平坦模. 所以 I 也是平坦模. 由定理 2.3.15，得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$. 又因 Λ 是左半遗传环，由定理 1.4.2 知，每个自由左 Λ-模的 f.g. 子模是投射模，因而是 f.p. 的. 根据定理 1.3.7 知，Λ 是左凝聚环.

(ii)⇒(i) 设 I 是 Λ 的任意 f.g. 左理想. 因 Λ 是左凝聚环，故 I 是 f.p. 的. 又因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$，并由定理 2.3.15 知，$I$ 是平坦模. 这样 I 是一个 f.p. 的平坦模. 于是由命题 1.2.4(ii)可知 I 是投射模. 故 I 是左半遗传环.

定义 设 Λ 是环，A 是左 Λ-模. 若 ${}_\Lambda\Lambda$ 余生成 A，即有正合列 $0\to A\to({}_\Lambda\Lambda)^I$，则称 A 为半自反模.

设 A 是左 Λ-模，由 1.1 节知 A 是半自反的当且仅当 $\bigcap\{\mathrm{Ker}h\mid h\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)\}=0$. 因此，若 A 是半自反模，对任意 $0\neq a\in A$，必存在 $f\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$，使 $f(a)\neq 0$.

引理 2.3.18 设 Λ 是整环，则

(i) 每个半自反 Λ-模 A 是无挠模；

(ii) 每个 f.g 无挠 Λ-模是半自反的.

证明 (i) 设 $a\in A$ 且 $a\neq 0$，若 $\lambda\in\Lambda$ 使 $\lambda a=0$. 因 A 是半自反的，故存在 $f\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$ 使 $f(a)\neq 0$. 于是得 $0=f(\lambda a)=\lambda f(a)$，且 $f(a)\neq 0$. 因 Λ 是整环，故 $\lambda=0$，即 A 是无挠模.

(ii) 因 Λ 是整环，若 A 是 f.g. 无挠 Λ-模，由定理 1.4.5 的证明知，A 是一个 f.g. 自由模的子模，故 A 是半自反的．

定理 2.3.19 设 Λ 是整环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 Prüfer 环；

(ii) W.gl.dim$\Lambda \leqslant 1$；

(iii) 每个无挠左 Λ-模是平坦的．

证明 (i)⇒(ii) 因 Prüfer 是半遗传整环，由定理 2.3.17，得 W.gl.dim$\Lambda \leqslant 1$.

(ii)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 无挠 Λ-模，于是有正合列 $0 \to A \to F \to F/A \to 0$，其中 F 是自由模．又由(ii)知，fd$(F/A) \leqslant 1$. 故 fd$A=0$，A 是平坦模．又因每个模是它的 f.g. 子模的正向极限，故每个无挠 Λ-模是平坦模．

(iii)⇒(i) 因环 Λ 的每个理想是半自反的，由(iii)知它是平坦模，故 W.gl.dim$\Lambda \leqslant 1$. 又因${}_\Lambda \Lambda^I$ 也是半自反的，故它也是平坦模．由定理 1.3.7 知，Λ 是凝聚环．又由定理 2.3.17 知，Λ 是半遗传环．这样，Λ 是半遗传整环，即 Prüfer 环．

最后，需要指出的是，若 Λ 是右 Noether 环，则 W.gl.dimΛ = r.gl.dimΛ；若 Λ 是左 Noether 环，则 W.gl.dimΛ=l.gl.dimΛ. 在第三章，我们将证明这个结果．

2.4 Ng 维数

Ho KuenNg 1984 年在文献[38～39]中定义了一种新的同调维数——Ng 维数，也称为有限表现维数．应用这种维数来研究环和模(特别是凝聚环)是一种重要方法．本节主要介绍这种维数的基本性质，以及 Ng.dim≤2 的模和环．本节所指的环均是交换环．

定义 设 Λ 是交换环．A 是 Λ-模．规定

Ng.dim$_\Lambda A$ = Inf{n | 如果存在正合列(＊) $P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$，其中每个 P_i 是投射模，且 P_{n+1}，P_n 是 f.g. 的}，

达到下确界的上述(*)正合列称为 A 的有限表现分解．若对任意自然数 n，没有上面的正合列(*)，规定 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=\infty$.

我们把 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A$ 称为模 A 的 Ng 维数，也称为 A 的有限表现维数，记为 $\mathrm{f.p.dim}_\Lambda A$.

定义 设 Λ 是交换环，规定

$$\mathrm{Ng.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\mid A \text{ 是 f.g. } \Lambda\text{-模}\},$$

并把它称为环 Λ 的 Ng 维数，也称为环 Λ 的有限表现维数，记为 $\mathrm{f.p.dim}\Lambda$.

由定义知，Λ-模 A 是 f.p. $\Leftrightarrow \mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=0$，并且，$\mathrm{Ng.dim}\Lambda=0 \Leftrightarrow$ Λ 是 Noether 环．因此，Ng 维数可以度量任意模与有限表现模的差距，任意环与 Noether 环的差距．

命题 2.4.1 设 A 是任意 f.g. Λ-模，则 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\neq 1$.

证明 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$，由定义得正合列 $P_2\to P_1\to P_0\xrightarrow{\varepsilon} A\to 0$，其中 P_0,P_1,P_2 是投射模，且 P_1,P_2 是 f.g. 的．令 $K=\mathrm{Ker}\varepsilon$，于是得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
0 & \to & K & \to & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \to & 0 \\
 & & \uparrow & \nearrow & & & & & \\
 & \nearrow & P_1 & & & & & & \\
P_2 & & & & & & & &
\end{array}$$

其中行、列皆正合．因 P_1 是 f.g. 的，且 $\mathrm{Ker}\varepsilon=\mathrm{Im}(P_1\to P_0)$，故 K 是 f.g. 的．因 K 和 A 皆为 f.g. 的，故根据定理 1.3.1 知，P_0 是 f.g. 的．于是知 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A<1$. 这与题设相矛盾，故 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\neq 1$.

推论 2.4.2 设 Λ 是任意交换环，则 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 1$.

命题 2.4.3 任意 f.g. 投射 Λ-模的 Ng 维数为 0，而非有限生成的投射 Λ-模的 Ng 维数为 1.

证明 设 P 是 f.g. 投射 Λ-模，则 $P\oplus P'=\Lambda^{(n)}$，其中 P' 是 f.g. 投射模．于是得 P 的有限表现分解 $P'\to\Lambda^{(n)}\to P\to 0$. 故 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda P=0$.

如果 P 是无限生成的投射模，可以作如下正合列

$$P_1 \xrightarrow{d_2} P_1 \oplus P_0 \xrightarrow{d_1} P_0 \oplus P \xrightarrow{\varepsilon} P \longrightarrow 0,$$

这里 $\varepsilon(x,y)=y, d_1(x_1,x)=x, d_2(x_1)=(x_1,0), \forall\, x\in P_0, x_1\in P_1, y\in P$，$P_0, P_1$ 是 f.g. 投射模．故 Ng.dim$P\leqslant 1$．又因 P 是无限生成的，Ng.dim$_\Lambda P\neq 0$，故 Ng.dim$P=1$.

命题 2.4.4 设 A 是 Λ-模，若 pd$A\leqslant n$，则 Ng.dim$A\leqslant n+1$；若 gl.dim$\Lambda\leqslant n$，则 Ng.dim$\Lambda\leqslant n+1$.

证明 显然仅需假定 $n<\infty$. 因 pd$A\leqslant n$,故有 Λ-模的正合列

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

其中每个 P_i 是投射模．若 P_n 是 f.g. 的，则由命题 2.4.3 知，Ng.dim$_\Lambda P_n=0$. 于是又得到正合列

$$P_{n+2} \to P_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中 P_{n+2}, P_{n+1}是 f.g. 投射模. 因此 Ng.dim$_\Lambda A\leqslant n+1$. 若 P_n 是非有限生成的，则 Ng.dim$_\Lambda P_n=1$. 于是得到正合列

$$P_{n+2} \to P_{n+1} \to P'_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中 P_{n+2}, P_{n+1}, P'_n 是投射模，且 P_{n+2}, P_{n+1}是 f.g. 的. 故 Ng.dim$A\leqslant n+1$.

现在,我们讨论交换凝聚环的 Ng 维数．

定理 2.4.5 设 Λ 是交换凝聚环，则

$$\text{gl.dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{W.gl.dim}\Lambda, \text{Ng.dim}\Lambda-1\}.$$

证明 由 2.3 节知 W.gl.dim$\Lambda\leqslant$gl.dimΛ，并且，由命题 2.4.4 可得 Ng.dim$\Lambda-1\leqslant$gl.dimΛ.

下面,仅需证 gl.dim$\Lambda\leqslant\{$W.gl.dimΛ,Ng.dim$\Lambda-1\}$.

如果 W.gl.dim$\Lambda\geqslant$Ng.dimΛ，令 W.gl.dim$\Lambda=n<\infty$. 若 Ng.dim$\Lambda=0$，则 Λ 是 Noether 环. 由 2.3 节知,gl.dimΛ= W.gl.dimΛ. 若 Ng.dim$\Lambda\neq 0$，则由命题 2.4.1 知，Ng.dim$\Lambda\geqslant 2$. 于是得

$$2\leqslant \text{Ng.dim}\Lambda\leqslant \text{W.gl.dim}\Lambda=n<\infty.$$

设 A 是任意 f.g. Λ-模，由于 Λ 是凝聚环，因此必有一个正合列

$$0 \to \text{Ker}d_n \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中每个 P_i 是投射模，且 $\mathrm{Ker}d_n$ 是有限表现模．但 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=n$，$\mathrm{fd}A\leqslant n$，由定理 2.2.1 知 $\mathrm{Ker}d_n$ 又是平坦模. 从而 $\mathrm{Ker}d_n$ 是投射模所以 $\mathrm{pd}A\leqslant n$. 于是由定理 2.3.1，得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant n$.

如果 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\mathrm{Ng.dim}\Lambda$，令 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=n<\infty$，显然 $n\geqslant 2$. 又因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<n$，故由上面讨论知，对任意 f.g. Λ-模 A，皆有 $\mathrm{pd}A\leqslant n$. 因此 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant n$. 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=n$，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda>\mathrm{W.gl.dim}\Lambda$. 设 A 是任意 f.g. Λ-模，因 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=n\geqslant 2$，故得到 A 的投射分解

$$0\to P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\to\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0,$$

其中 P_n 是 f.g. 投射模．令 $K_{n-2}=\mathrm{Ker}d_{n-2}$，于是得正合列 $0\to P_n\to P_{n-1}\to K_{n-2}\to 0$. 又因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<n$，故 K_{n-2} 是平坦模．由于 P_{n-1} 是投射模，因此必存在投射模 Q，使 $P_{n-1}\oplus Q=F$，其中 F 是自由模. 所以，又有正合列 $0\to P_n\to F\to K_{n-2}\oplus Q\to 0$，且 $K_{n-2}\oplus Q$ 是平坦模．因 P_n 是f.g.，令 $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 是它的生成集，由命题 1.2.4(ii)的证明可知，必存在 Λ-同态 $\sigma:F\to P_n$，使 $\sigma(v_i)=v_i$，$i=1, 2, \cdots, m$. 于是得 $F\cong P_n\oplus K_{n-2}\oplus Q$. 故 K_{n-2} 是投射模．从而又得到 A 的一个投射分解

$$0\to K_{n-2}\to P_{n-2}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0.$$

故 $\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant n-1$. 因此 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant n-1$. 这就导出矛盾，所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\mathrm{Ng.dim}\Lambda$.

设 Λ 是交换凝聚环，A 是 Λ-模，且正合列

$$P_{n+1}\to P_n\to\cdots\to P_0\to A\to 0$$

是它的有限表现分解．因为 P_{n+1}, P_n 是 f.g. 投射模，Λ 是凝聚环，所以必得到模 A 的一个投射分解

$$\cdots\to P_{n+3}\to P_{n+2}\to P_{n+1}\to\cdots\to P_0\to A\to 0, \tag{1}$$

其中 $P_{n+2}, P_{n+3},\cdots$ 都是 f.g. 投射模．我们把(1)式的投射分解称为模 A 的表示序列．

定理 2.4.6 设 Λ 是交换凝聚环，$0\to A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\to 0$ 是 Λ-模的正合列．令 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A'=n'$，$\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=n$，$\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A''=n''$，若它们中两个是有限的，则另一个也是有限的，并且有

(i) $n\leqslant\mathrm{Sup}\{n',n''\}$;

(ii) $n'' \leqslant \operatorname{Sup}\{n, n'+1\}$;

(iii) $n' \leqslant \operatorname{Sup}\{n, n''-1\}$.

证明 (i) 若 n', n''有限，则有 A', A''的表示序列

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
\cdots \longrightarrow & P''_{n''} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & P''_2 & \xrightarrow{d''_2} & P'' & \xrightarrow{d''_1} & P''_0 & \xrightarrow{\varepsilon''} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & \searrow^{\sigma_0} & \uparrow g & & \\
 & & & & & & & & & & A & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow f & & \\
\cdots \longrightarrow & P'_{n'} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & P'_2 & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

由模的分解性质，必存在 A 的一个投射分解

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

其中 $P_i = P'_i \oplus P''_i$, $i=0,1,2,\cdots$; $\varepsilon(x'_0, x''_0) = f\varepsilon'(x'_0) + \sigma_0(x''_0)$，这里 $\sigma_0: P''_0 \to A$ 是由于 P''为投射模，以及右图中行正合，从而得到的 Λ-同态，它使这个图是交换的，即 $\varepsilon'' = g\sigma_0$. 由于对任意 $m \geqslant \operatorname{Sup}\{n', n''\}$, P'_m, P''_m都是 f.g. 投射模，因此 $P'_m \oplus P''_m = P_m$ 是 f.g. 投射模. 故 $n \leqslant \operatorname{Sup}\{n', n''\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P''_0 & & \\
 & \swarrow^{\sigma_0} & \downarrow \varepsilon'' & & \\
A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(ii) 若 n', n 有限，则有 A', A 的表示序列(见下图).

作 Λ-模的序列

$$\cdots \to P_m \oplus P'_{m-1} \xrightarrow{d''_m} \cdots \to P_1 \oplus P'_0 \xrightarrow{d''_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon''} A'' \to 0,$$

这里 $\varepsilon''(x_0) = g\varepsilon(x_0)$, $d''_1(x_1, x'_0) = d_1(x_1) + f_0(x'_0)$, $\forall\ x'_0 \in P'_0, x_0 \in P_0$, $x_1 \in P_1$. 当 $i \geqslant 2$ 时，$d''_i(x_i, x'_{i-1}) = (d_i(x_i) + (-1)^{i-1} f_{i-1}(x'_{i-1}), d'_{i-1}(x'_{i-1}))$, $\forall\ x_i \in P_i, x'_{i-1} \in P'_{i-1}$. 显然，$\varepsilon''$是 Λ-满同态，并且经直接验证可知，这是一个正合列. 由于对任意 $m \geqslant \operatorname{Sup}\{n, n'+1\}$, P_m, P'_{m-1} 都

是 f. g. 投射模，因此 $P_m \oplus P'_{m-1}$ 是 f. g. 投射模. 故 $n'' \leqslant \mathrm{Sup}\{n, n'+1\}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & A''=A/A' & & \\
 & & & & & & & & & \overset{g\varepsilon}{\nearrow} & \uparrow g & & \\
\cdots \longrightarrow & P_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \uparrow f_2 & & \uparrow f_1 & & \uparrow f_0 & & & \uparrow f & & \\
\cdots \longrightarrow & P_n' & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_2' & \xrightarrow{d_2'} & P_1' & \xrightarrow{d_1'} & P_0' & \xrightarrow{\varepsilon'} & & A' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

类似地，我们可以证明(iii)也成立.

推论 2.4.7 设 $0 \to K \to P \to A \to 0$ 是 Λ-模的正合列，P 是投射模.

(i) 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \geqslant 2$，则 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K = \mathrm{Ng.dim}_\Lambda A - 1$；

(ii) 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \leqslant 1$，则 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K \leqslant 1$.

证明 由定理 2.4.6，得

$$\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K \leqslant \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda P, \mathrm{Ng.dim}_\Lambda A - 1\}.$$

因 P 是投射模，故由命题 2.4.3 知，$\mathrm{Ng.dim}_\Lambda P \leqslant 1$. 所以若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \geqslant 2$，就有 $\mathrm{Ng.dim} K \leqslant \mathrm{Ng.dim}_\Lambda A - 1$. 又因 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \leqslant \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda P, \mathrm{Ng.dim}_\Lambda K + 1\} = \mathrm{Ng.dim}_\Lambda K + 1$，故 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K = \mathrm{Ng.dim}_\Lambda A - 1$. 至于第二个结论成立是显然的.

定理 2.4.8 设 Λ 是交换凝聚环，则

$$\mathrm{Ng.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \mid A \text{ 是循环 } \Lambda\text{-模}\}.$$

证明 令 $n = \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \mid A$ 是循环 Λ-模$\}$，则 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda \geqslant n$.

反过来，假定 $n < \infty$ 且 $n \geqslant 1$，A 是任意 f. g. 模，$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是它的生成集. 对 m 作数学归纳法. 若 $m = 1$，显然 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \leqslant n$. 若 $m > 1$，作正合列 $0 \to K \to \Lambda^{(m)} \xrightarrow{\varphi} A \to 0$，其中 $\varphi(e_i) = a_i, i = 1, 2, \cdots, m$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是 $\Lambda^{(m)}$ 的基. 因而，由定理 2.4.6，知 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A \leqslant \mathrm{Ng.dim}_\Lambda K + 1$. 我们又作正合列

$$0 \to L \to \Lambda^{(m-1)} \to \Lambda a_1 + \Lambda a_2 + \cdots + \Lambda a_{m-1} \to 0.$$

显然 $L\subseteq K$. 令 $\overline{K}=K/L$, $F=\Lambda^{(m)}/\Lambda^{(m-1)}$, $\overline{A}=A/(\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_{m-1})$, 因而有正合列 $0\to\overline{K}\to F\to\overline{A}\to 0$. 若 $\mathrm{Ng.dim}\overline{A}=0$, 则 $\overline{A}$ 是 f.p. 的, $\overline{K}$ 为自由模 F 的 f.g. 子模. 但 Λ 是凝聚环, 由定理 1.3.7, $\overline{K}$ 也是 f.p. 的. 因此 $\mathrm{Ng.dim}\overline{K}=0$. 另外, 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda(\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_{m-1})=0$, 则又有 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda L=0$. 于是由正合列 $0\to L\to K\to\overline{K}\to 0$, 得 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K=0$. 故 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\leqslant n$. 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda(\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_{m-1})\neq 0$, 因它是有限生成的, 且生成元的个数小于 m, 则由归纳法假设和命题 2.4.1, 得

$$2\leqslant \mathrm{Ng.dim}_\Lambda(\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_{m-1})\leqslant n.$$

因而又知 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda L\leqslant n-1$. 于是得 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda K\leqslant n-1$. 所以 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\leqslant n$. 其次, 若 $\mathrm{Ng.dim}\overline{A}\geqslant 1$, 则

$$2\leqslant \mathrm{Ng.dim}_\Lambda\overline{A}\leqslant n,$$

因此 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda\overline{K}=\mathrm{Ng.dim}_\Lambda\overline{A}-1\leqslant n-1$. 仿照上面讨论, 我们又可以得到 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda L=0$ 或 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda L\leqslant n-1$. 所以 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A\leqslant n$.

综合以上讨论, 若 $n\geqslant 1$ 时, 必有 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=n$.

最后, 若 $n=0$, 则每个循环 Λ-模都是有限表现模. 因而每个 f.g. 模是有限表现的. 故 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=0$.

推论 2.4.9 设 Λ 是交换凝聚环, $n\geqslant 2$, 则

$\mathrm{Ng.dim}\Lambda=n\Leftrightarrow \mathrm{Sup}\{\mathrm{Ng.dim}_\Lambda I\mid I$ 是 Λ 的非 f.g. 理想$\}=n-1$.

下面我们讨论 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$ 的环, 这里 Λ 不一定是凝聚环.

定义 设 Λ 是交换环, A 是 Λ-模, 若 $A=A'\oplus A''$, 其中 A' 是f.p. 的, A'' 是非 f.g. 自由模, 则称 A 为几乎有限表现的, 记作a.f.p..

定理 2.4.10 设 Λ 是交换环, 且 Λ 上每个投射模是自由的. A 是 Λ-模, 若 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$, 则 A 是 a.f.p. 的.

证明 由于 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$, 因此可以得到一个 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\xrightarrow{\varphi}A\to 0$, 其中 F 是投射模, K 是 f.p. 的. 根据题设知, F 是自由模. 令 $\{e_i\mid i\in I\}$ 是 F 的基, $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 是 K 的生成元集. 则 $k_j=\sum\lambda_{ji}e_i$, 其中 $\lambda_{ji}\neq 0$. 令 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 中每个元素表示成 $\{e_i\mid i\in I\}$ 的线性组合中出现的 e_i 的全体. 记 $a_1=\varphi(e_1)$, $a_2=$

$\varphi(e_2),\cdots,a_n=\varphi(e_n)$，且 B 是由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的 A 的子模，其余 e_i 在 φ 下的象生成的 A 的子模记为 C，于是得 $A=B+C$.

若 $\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n=\lambda_{n+1}a_{n+1}+\cdots+\lambda_{n+s}a_{n+s}$，这里 $a_{n+1}=\varphi(e_{n+1})$，$\cdots,a_{n+s}=\varphi(e_{n+s})$，且 $a_{n+1},\cdots,a_{n+s}\in C$，则 $\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n-(\lambda_{n+1}e_{n+1}+\cdots+\lambda_{n+s}e_{n+s})\in K$. 因此它是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合. 而 F 是自由模，故 $\lambda_{n+1}=\cdots=\lambda_{n+s}=0$. 因此 $B\cap C=0$，即 $A=B\oplus C$. 其次，又有正合列 $0\to K\to\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle\to B\to 0$，故 B 是 f.p. 模. 另外，因 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$，$A$ 非 f.g.，故 F 也非 f.g.. 所以 $C\cong\langle e_i\,|\,i\in I,i\neq 1,2,\cdots,n\rangle$ 是非 f.g. 自由模.

推论 2.4.11 设 A 是 Λ-模，则

(i) 若 Λ 是局部环，且 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$，则 A 是 a.f.p.；

(ii) 若 Λ 是凝聚环，A 是 a.f.p.，则 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$；

(iii) 若 Λ 是凝聚局部环，那么 A 是 a.f.p.$\Leftrightarrow\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$.

证明 (i) 因局部环上的投射模是自由模，由定理 2.4.10 知，A 是 a.f.p..

(ii) 由题设得 $A=A'\oplus A''$，A' 是 f.p. 的，A'' 是非 f.g. 自由模. 根据命题 2.4.3 知，$\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A''=1$. 另外 $\mathrm{Ng.dim}A'=0$，于是得 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda A=1$.

(iii) 由(i)和(ii)便知结论(iii)成立.

推论 2.4.12 没有 Ng 维数为 2 的凝聚局部环.

证明 如果 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$，因 Λ 是凝聚环，由推论 2.4.9 知，存在 Λ 的非 f.g. 理想 I，使 $\mathrm{Ng.dim}_\Lambda I=1$. 又根据定理 2.4.10，可得 $I=B\oplus C$，B 是 f.p. 的，C 是非 f.g. 自由模. 若 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 是 C 的基，因 $e_ie_1\in\Lambda e_1\cap\Lambda e_i=0$，则 $e_ie_1=0$. 因而 $e_i=0,\forall\, i\neq 1$. 这样，$C=\langle e_1\rangle$. 于是导出矛盾，故 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 2$.

推论 2.4.13 设 Λ 是遗传环，若 Λ 不是 Noether 环，则 Λ 不是局部环.

证明 因 Λ 是遗传环，故 Λ 是凝聚环. 如果 Λ 是局部环，由推论 2.4.12 知，$\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 2$. 又因 Λ 不是 Noether 环，故 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 0$. 由推论 2.4.2 知，$\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 1$. 故 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\geqslant 3$.

另外,因 Λ 是凝聚环,由定理 2.4.5,得

$$\text{gl.}\dim\Lambda=\operatorname{Sup}\{\text{W.gl.}\dim\Lambda,\text{Ng.}\dim\Lambda-1\}\geqslant 2.$$

但 Λ 是遗传环,根据定理 2.3.13 知,$\text{gl.}\dim\Lambda\leqslant 1$. 这就导出矛盾,故 Λ 不是局部环.

由推论 2.4.13 知,遗传局部环必是 Noether 环.

命题 2.4.14 设 Λ 是交换环,S 是 Λ 的乘法封闭集,A 是 Λ-模,则 $\text{Ng.}\dim_\Lambda A\geqslant\text{Ng.}\dim_{\Lambda_S}A_S$, $\text{Ng.}\dim\Lambda\geqslant\text{Ng.}\dim\Lambda_S$.

证明 仅需讨论 $\text{Ng.}\dim_\Lambda A=n<\infty$. 令

$$P_{n+1}\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

是 A 的有限表示分解,于是得正合列

$$(P_{n+1})_s\to(P_n)_s\to\cdots\to(P_1)_s\to(P_0)_s\to A_s\to 0.$$

由于 P_{n+1},P_n 是 f.g. 投射模,因此它们的分式模 $(P_{n+1})_s$, $(P_n)_s$ 也是 f.g. 投射模. 故 $\text{Ng.}\dim_{\Lambda_S}A_S\leqslant n$.

其次,设 B 是 f.g. Λ_S-模,则必存在 f.g. Λ-模 C,使得 $C_S=B$. 因此,$\text{Ng.}\dim_{\Lambda_S}B=\text{Ng.}\dim_{\Lambda_S}C_S\leqslant\text{Ng.}\dim_\Lambda C$. 所以 $\text{Ng.}\dim\Lambda\geqslant\text{Ng.}\dim\Lambda_S$.

命题 2.4.15 设 Λ 是交换环,如果 $\text{Ng.}\dim\Lambda=2$,且 Λ_P 是凝聚环,$\forall\ P\in\operatorname{Spec}(\Lambda)$,那么 Λ 不是 Noether 的,而 Λ_P 是 Noether 环,$\forall\ P\in\operatorname{Spec}(\Lambda)$.

证明 因 Λ_P 是凝聚局部环,由推论 2.4.12 知,$\text{Ng.}\dim\Lambda_P\neq 2$. 又因 $\text{Ng.}\dim\Lambda=2$,由命题 2.4.14,得 $\text{Ng.}\dim\Lambda_P\leqslant 1$. 但 $\text{Ng.}\dim\Lambda_P\neq 1$,故 $\text{Ng.}\dim\Lambda_P=0$,即 Λ_P 是 Noether 环.

其次,若 Λ 是 Noether 环,则 $\text{Ng.}\dim\Lambda=0$. 从而由题设知 Λ 不是 Noether 环.

推论 2.4.16 设 Λ 是交换凝聚环,且 $\text{Ng.}\dim\Lambda=2$,则 Λ 不是 Noether 的,而 Λ_P 是 Noether 环,$\forall\ P\in\operatorname{Spec}(\Lambda)$.

2.5 FP-内射维数和 f.p.gl.dim 维数

FP-内射维数是 Stenström 于 1970 年在文献[81]中提出的,这种维数与 FP-内射模有着密切的联系.本节先介绍 FP-内射模及其基本

性质，然后讨论 FP-内射维数，f. p. gl. dim 维数以及由 FP-内射模决定的一类环-GQF-环.

定义 设 Λ 是环，A 是左 Λ-模，若对任意 f. p. 左 Λ-模 B 皆有 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A)=0$，则称 A 为 FP-内射模.

FP-内射模也就是绝对纯模，Megibben 在文献[61]中首先使用这种模来讨论半遗传环，对研究凝聚环、FP-内射模也起着重要作用.

显然，内射模是 FP-内射模.

定理 2.5.1 设 A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是 FP-内射模；

(ii) 若 K 是 f. g. 自由左 Λ-模 F 的 f. g. 子模，则对任意 Λ-同态 f: $K\to A$，必存在 Λ-同态 $\bar{f}$: $F\to A$，使得下图是交换的.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\text{Inc}} & F \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ & & A & & \end{array}$$

(iii) 每个正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是纯的；

(iv) 存在一个纯正合列 $0\to A\to A'\to A''\to 0$，其中 A' 是 FP-内射.

证明 (i)⇒(ii) 用 $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,A)$作用于短正合列 $0\to K\to F\to F/K\to 0$，得正合列

$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F/K,A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F,A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,A)\to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(F/K,A)$.

因 F/K 是 f. p. 的，由题设知，$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F/K,A)=0$. 故 f: $K\to A$ 可扩张为 $\bar{f}$: $F\to A$.

(ii)⇒(i) 设 B 是任意 f. p. 左 Λ-模，于是得正合列 $0\to K\to F\to B\to 0$，其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 f. g. 的. 从而又得正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F,A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,A)\to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A)\to 0.$$

由(ii)知 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F,A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,A)$是满同态，于是 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A)=0$. 故 A 是 FP-内射模.

(i)⇒(iii) 设 D 是任意 f. p. 左 Λ-模，由(i)知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(D,A)=0$.

因而由正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(D,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(D,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(D,C) \to 0.$$

并由定理 1.2.6 知(iii)成立.

(iii)⇒(iv) 把 A 嵌入一个内射模 E 中,于是得正合列 $0 \to A \to E \to E/A \to 0$. 由(iii)知这个序列是纯正合的. 又因内射模 E 必是 FP-内射模,故(iv)成立.

(iv)⇒(i) 设 B 是任意 f.p. 左 Λ-模,且序列 $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ 是纯正合的,A'是 FP-内射模. 由 $\mathrm{Ext}_\Lambda(B,-)$得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A'') \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A') \to \cdots.$$

因 A'是 FP-内射模,故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A')=0$. 又因为 $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ 纯正合,由定理 1.2.6 知,$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,A') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A'')$是满同态,所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,A)=0$,即 A 是 FP-内射模.

由定理 2.5.1 知,模 A 是 FP-内射的当且仅当 A 是绝对纯的.

命题 2.5.2 设 Λ 是环,$\{A_i \mid A_i$ 是左 Λ-模,$i \in I\}$,则 $\prod_{i\in I} A_i(\bigoplus_{i\in I} A_i)$是 FP-内射模⇔每个 A_i 是 FP-内射模(文献[47]中的引理 2.1).

定义 设 A 是左 Λ-模,记

$$\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A = \mathrm{Inf}\{n \mid \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=0, \forall \text{ f.p. 左 } \Lambda\text{-模 } B\},$$

并把它叫做模 A 的左 FP-内射维数. 如果这样的 n 不存在,规定 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=\infty$.

模 A 的左 FP-内射维数也称为 A 的左纯维数,记为 $\mathrm{l.pure.dim}_\Lambda A$.

同样,可以定义右 Λ-模的右 FP-内射维数.

显然,$\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=0$⇔$A$ 是左 FP-内射模.

定义 设 Λ 是环,记 $\mathrm{l.FP\text{-}I.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A, \forall A \in \mathscr{C}_\Lambda^L\}$,并把它叫做环 Λ 的左 FP-内射维数.

环的左 FP-内射维数也称为环 Λ 的纯维数,用 $\mathrm{l.pure.dim}\Lambda$ 表示. 同样,可定义环 Λ 的右 FP-内射维数,记为 $\mathrm{r.FP\text{-}I.dim}\Lambda$.

与环的 FP-内射维数有密切联系的是 f. p. gl. dim 维数(见文献[60]).

定义 设 Λ 是环，定义

$$\text{l. f. p. gl. dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{l. pd}_\Lambda A \mid A \text{ 是任意 f. p. 左 } \Lambda\text{-模}\}.$$

如果考虑右 Λ-模，可以定义 r. f. p. gl. dimΛ.

命题 2.5.3 设 Λ 是环，则

(i) W. gl. dim$\Lambda \leqslant$ r. FP-I. dim$\Lambda \leqslant$ r. f. p. gl. dim$\Lambda \leqslant$ r. gl. dimΛ;

(ii) W. gl. dim$\Lambda \leqslant$ l. f. p. gl. dim$\Lambda \leqslant$ l. gl. dimΛ.

证明 (i) 设 r. FP-I. dim$\Lambda=n$，如果 W. gl. dim$\Lambda>n$，根据定理 2.3.2 知，存在左 Λ-模 A 和 Λ 的 f. g. 右理想 I，使得 $\text{Tor}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A)\neq 0$. 因 Q/Z 是内射 Z-模，这里 Q 是有理数环，Z 是整数环，故得

$$\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,\text{Hom}_Z(A,Q/Z))\cong\text{Hom}_Z(\text{Tor}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A),Q/Z).$$

因 $\text{Tor}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A)\neq 0$，且 Q/Z 是内射余生成元，故 $\text{Hom}_Z(\text{Tor}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A),Q/Z)\neq 0$，所以 $\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,\text{Hom}_Z(A,Q/Z))\neq 0$，且 Λ/I 是 f. p. 的. 因此 r. FP-$\text{Id}_\Lambda\text{Hom}_Z(A,Q/Z)\geqslant n+1$. 这与 r. FP-I. dim$\Lambda=n$ 相矛盾，故 W. gl. dim$\Lambda\leqslant$ r. FP-I. dimΛ.

其次，设 r. f. p. gl. dim$\Lambda=n$，则存在 f. p. 右 Λ-模 B 和右 Λ-模 A，使得 $\text{Ext}_\Lambda^n(B,A)\neq 0$，并且对任意 f. p. 右 Λ-模 C，皆有 $\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(C,D)=0$，其中 D 是任意右 Λ-模. 所以，r. FP-I. dim$\Lambda\leqslant n$. 至于最后一个不等式成立是显然的.

(ii) 由定理 2.3.2 直接得到第一个不等式.

命题 2.5.4 设 Λ 是左凝聚环，A 是 f. p. 左 Λ-模，则 fd$A$=pd$A$.

证明 因投射模是平坦模，故 fd$A\leqslant$ pd$A$. 反过来，设 fd$A=n<\infty$，因 A 是 f. p. 的，故得正合列 $0\to K_1\to F_0\to A\to 0$，其中 F_0 是 f. g. 自由左 Λ-模，K_1 是 f. g. 左 Λ-模. 因 Λ 是左凝聚环，故由定理 1.3.7 知，K_1 也是 f. p. 的. 因此又存在正合列 $0\to K_2\to F_1\to K_1\to 0$，其中 K_2 是 f. p. 的，F_1 是自由模. 这样继续下去，我们可以得一个正合列 $0\to K_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to A\to 0$，其中每个 F_i 是自由模，K_n 是 f. p. 的. 又因 fd$A=n$，并由定理 2.2.1 知 K_n 是平坦模，故 K_n 是 f. p. 平坦模. 它必是投射模，故 pd$A\leqslant n$.

对右凝聚环也有类似的结果.

定理 2.5.5 设 Λ 是右凝聚环，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.FP\text{-}I.dim}\Lambda=\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda.$$

如果 Λ 是左凝聚环，必有 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.f.p.gl.dim}\Lambda$.

证明 由命题 2.5.4，得

$$\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{r.pd}_\Lambda A=\mathrm{r.fd}_\Lambda A \mid A\text{ 是任意 f.p. 右 }\Lambda\text{-模}\}$$
$$\leqslant \mathrm{W.gl.dim}\Lambda.$$

又由命题 2.5.3，得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.FP\text{-}I.dim}\Lambda=\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda.$$

类似地，可以推得第二等式.

推论 2.5.6 设 Λ 是环，则下列条件是等价的：

(i) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=0$；

(ii) $\mathrm{l.f.p.gl.dim}\Lambda=0$；

(iii) $\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda=0$；

(iv) $\mathrm{r.FP\text{-}I.dim}\Lambda=0$.

证明 由命题 2.5.3，仅需考虑 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=0$. 由定理 2.3.14 知，$\Lambda$ 是 VN 正则环. 又由定理 1.3.7 和定理 1.4.15 知，Λ 是左(右)凝聚环. 于是根据定理 2.5.5 知，(ii)、(iii)、(iv)皆成立.

推论 2.5.7 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda=1$；

(ii) $\mathrm{r.FP\text{-}I.dim}\Lambda=1$，且 Λ 是右凝聚环；

(iii) Λ 是右半遗传环，但不是 VN 正则环.

证明 (i)⇒(iii) 设 I 是环 Λ 的任意 f.g. 右理想，于是得正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$. 因而对任意右 Λ-模 A，又有正合列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/I,A)\to\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda,A)\to\mathrm{Ext}^1_\Lambda(I,A)$$
$$\to\mathrm{Ext}^2_\Lambda(\Lambda/I,A)\to\cdots. \qquad (1)$$

由于 $\mathrm{r.f.p.gl.dim}\Lambda=1$，且 Λ/I 是 f.p. 的，因此得 $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(\Lambda/I,A)=0$. 另外 Λ_Λ 是投射模，$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda,A)=0$，代入正合列(1)，得 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(I,A)=0,\forall A$. 所以 I 是投射模. 因而 Λ 是右半遗传环. 又由定理 2.3.17 知，Λ 是右凝聚环. 再根据定理 2.5.5，得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=1$. 所以 Λ 不

是 VN 正则的.

(iii)⇒(ii)　由(iii)知,$W.gl.\dim\Lambda=1$,且 Λ 是右凝聚环. 又由定理 2.5.5,得 $r.FP\text{-}I.\dim\Lambda=1$.

(ii)⇒(i)　直接由定理 2.5.5 推得.

定义　设 Λ 是环，定义

$l.f.W.\dim\Lambda=\mathrm{Sup}\{l.fd_\Lambda A\mid A$ 是左 Λ-模，$l.fd_\Lambda A<\infty\}$；

$l.f.FP\text{-}I.\dim\Lambda=\mathrm{Sup}\{l.FP\text{-}Id_\Lambda A\mid A$ 是左 Λ-模，$l.FP\text{-}Id_\Lambda A<\infty\}$；

$l.f.f.p.\dim\Lambda=\mathrm{Sup}\{l.pd_\Lambda A\mid A$ 是 f.p. 左 Λ-模，$l.pd_\Lambda A<\infty\}$.

对右 Λ-模，可以定义 r.f.W.dim，r.f.FP-I.dim，r.f.f.p.dim.

命题 2.5.8　设 Λ 是环,则

(i) $l.f.W.\dim\Lambda\leqslant r.f.FP\text{-}I.\dim\Lambda\leqslant r.f.f.p.\dim\Lambda$,

$l.f.W.\dim\Lambda\leqslant l.f.f.p.\dim\Lambda$.

若对任意循环 f.p. 左 Λ-模 A,皆有 $fdA<\infty$，则

$$W.gl.\dim\Lambda=l.f.W.\dim\Lambda.$$

(ii) 若 Λ 是右凝聚环，则

$$l.f.W.\dim\Lambda=r.f.FP\text{-}I.\dim\Lambda=r.f.f.p.\dim\Lambda.$$

证明　(i) 仅需证最后一个不等式. 首先，由定义得 $l.f.W.\dim\Lambda\leqslant W.gl.\dim\Lambda$. 其次由定理 2.3.2，得

$$W.gl.\dim\Lambda=\mathrm{Sup}\{l.fd_\Lambda(\Lambda/I)\mid I \text{ 是 } \Lambda \text{ 的任意 f.g. 左理想}\}.$$

因 Λ/I 是循环模，故由题设知,$l.fd_\Lambda(\Lambda/I)<\infty$. 于是得

$$W.gl.\dim\Lambda\leqslant l.f.W.\dim\Lambda.$$

故 $W.gl.\dim\Lambda=l.f.W.\dim\Lambda$.

至于(i)中其余不等式和(ii)，可仿照命题 2.5.3 和定理 2.5.5 的证明推得.

关于 f.f.p.dim 维数,我们将在第四章进一步讨论. 下面研究正则模是 FP-内射模的环.

定义　设 Λ 是环，若正则模${}_\Lambda\Lambda(\Lambda_\Lambda)$是 FP-内射模，则称环 Λ 是左(右)自 FP-内射的.

命题 2.5.9　设 Λ 是左凝聚环，A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n$;

(ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=0$，$B$ 是任意 f.p. 左 Λ-模；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A)=0$，$I$ 是 Λ 的任意 f.g. 左理想；

(iv) 若对任意左 Λ-模的正合列

$$0\to A\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_n\to 0,$$

其中每个 E_i 是 FP-内射模，$0\leqslant i\leqslant n-1$，则 E_n 也是 FP-内射模．

证明 (i)⇒(ii) 对 n 作数学归纳法．当 $n=0$，结论成立是显然的．若 $n=1$，当 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=1$ 时，由定义知对任意 f.p. 左 Λ-模 B，皆有 $\mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,A)=0$. 当 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=0$ 时，因 Λ 是左凝聚环，故得左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to B\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 的. 因而又得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F,A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^2(F,A).$$

由于 F 是自由模，$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F,A)=\mathrm{Ext}_\Lambda^2(F,A)=0$，因此得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,A)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,A).$$

因 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=0$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,A)=\mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,A)=0$. 现在假定 $n>1$，若 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A=n$，则(ii)已经成立. 若 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda A\leqslant n-1$，设 B 是任意 f.p. 左 Λ-模，由于 Λ 是凝聚环，因此又有左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to B\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 的，并且有

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^{n}(K,A).$$

于是由数学归纳法假设，得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n}(K,A)=0$. 故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=0$.

(ii)⇒(iii) 结论成立是显然的.

(iii)⇒(ii) 设 B 是 f.p. 左 Λ-模，对 B 的生成集所含元素个数作数学归纳法.

令 $\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ 是 B 的一个生成元素，$B'=\langle b_1\rangle$ 是 B 的子模. 因 Λ 是左凝聚环，B 是 f.p. 的，故 $B'\cong\Lambda/I$，I 是 Λ 的一个 f.g. 左理想. 由(iii)知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B',A)=0$. 考虑正合列 $0\to B'\to B\to B/B'\to 0$，因 Λ 是左凝聚环，故 B/B' 为 f.p. 的，它的生成元个数小于 m. 由归纳法假设得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B/B',A)=0$. 于是又由正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B/B',A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B',A),$$

得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=0$.

(ii)⇒(iv) 若左 Λ-模的序列

$$0\to A\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_n\to 0 \qquad (2)$$

正合，其中每个 $E_i(0\leqslant i\leqslant n-1)$是 FP-内射模. 令 B 是任意 f.p. 左 Λ-模，由(i)⇒(ii)的证明知，$\mathrm{Ext}_\Lambda^m(B,E_i)=0,\forall\ m>0,\ 0\leqslant i\leqslant n-1$. 因此由(2)得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,E_n).$$

于是由(ii)得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,E_n)=0.$$

故 E_n 是 FP-内射模.

(iv)⇒(i) 作左 Λ-模的正合列

$$0\to A\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_n\to 0, \qquad (3)$$

其中 $E_0,E_1,\cdots,E_{n-1}$是内射模，因而也是 FP-内射模. 由(iv)知 E_n 是 FP-内射模. 于是对任意 f.p. 左 Λ-模 B,由正合列(3)得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,E_n).$$

又因 E_n 是 FP-内射模,于是得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,E_n)=0.$$

所以,l. FP-$\mathrm{Id}_\Lambda A\leqslant n$.

引理 2.5.10 设 Λ 是左凝聚环且是左自 FP-内射的,则每个平坦左 Λ-模是左 FP-内射模.

证明 设 U 是平坦左 Λ-模,作正合列 $0\to K\to F\to U\to 0$, 其中 F 是自由模. 因 $F={}_\Lambda\Lambda^{(I)}$ 且${}_\Lambda\Lambda$ 是 FP-内射模，故由命题 2.5.2 知，F 是 FP-内射模. 又因 U 是平坦模，由命题 1.2.5 知，序列 $0\to K\to F\to U\to 0$是纯正合的,且 F 是 FP-内射模. 应用定理 2.5.1,则 K 是 FP-内射模. 于是根据命题 2.5.9 知, U 是 FP-内射模.

定理 2.5.11 设 Λ 是左和右凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左自 FP-内射的；

(ii) 每个 FP-内射右 Λ-模是平坦模；

(iii) 每个内射右 Λ 模是平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 设 U 是 FP-内射右 Λ-模，A 是任意 f.p. 右 Λ-模. 因 Λ 是右凝聚环，故由对偶公式得

$$\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,U),Q/Z)\cong\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z)),\quad(4)$$

其中 Q 是有理数域，Z 是整数环. 因 U 是 FP-内射，$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,U)=0$，故(4)式两端等于零. 于是得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,\mathrm{Hom}_\Lambda(U,Q/Z))=0.$$

记 $U^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(U,Q/Z)$，则 U^* 是平坦左 Λ-模. 因 Λ 是左凝聚左自 FP-内射，故由引理 2.5.10 知，U^* 是 FP-内射模. 但是，对任意 f.p. 左 Λ-模 B，又有

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,U^*)\cong\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U,B),Q/Z).\quad(5)$$

因 U^* 是 FP-内射，故(5)式两端等于零. 又因 Q/Z 是内射余生成元，故 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U,B)=0$. 因而 U 是平坦模.

(ii)⇒(iii) 结论显然是成立的.

(iii)⇒(i) 设 A 是任意 f.p. 左 Λ-模，令 C 是模范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^R$ 内一个内射余生成元. 因 Λ 是左凝聚环，故得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(C,A)=\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,C),A)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda),C).$$

并由(iii)知 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(C,A)=0$. 因而

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda),C)=0,$$

且 C 是内射余生成元. 故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda)=0$. 因此 Λ 是左自内射的.

定义 设 Λ 是环，若每个左(右)Λ-内射模是平坦模，则称 Λ 为左(右)IF-环(见文献[47]).

由定理 2.5.11 知，若 Λ 是左和右凝聚环，则 Λ 是右 IF-环当且仅当 Λ 是左自 FP 内射的.

最后，我们应用 FP-内射引进一类环.

定义 设 Λ 是环，若它是左凝聚左自 FP-内射的，则称 Λ 为左 GQF-环(见文献[112]).

类似地，可定义右 GQF-环.

以下讨论，主要参考文献[112],[81],[47].

为了讨论 GQF-环，我们先证明一个命题.

命题 2.5.12 设 Λ 是左凝聚环，则

$$\text{1. FP-Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}E\,|\,E\text{ 为内射右 }\Lambda\text{-模}\}.$$

证明 因 Λ 是左凝聚环，对任意 f.p. 左 Λ-模 A，内射右 Λ-模 E，

由对偶公式得

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(E,A)=\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda,E),A)\cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Ext}_{\Lambda}^n(A,\Lambda),E). \quad (6)$$

若 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_{\Lambda}({}_{\Lambda}\Lambda)=n$，则 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda)=0$. 由(6)可知 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(E,A)=0$. 故 $\mathrm{fd}E\leqslant n$.

反过来，设 $\mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}E\,|\,E$ 是内射右 Λ-模$\}=n$，令 C 是模范畴 $\mathscr{C}_{\Lambda}^{R}$ 内一个内射余生成元，则 $\mathrm{fd}C\leqslant n$. 因此，对任意 f. p. 左 Λ-模 A，有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(C,A)=0$. 又由(6)得

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda),C)=0.$$

因 C 是内射余生成元，故 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda)=0$. 因而 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_{\Lambda}({}_{\Lambda}\Lambda)\leqslant n$，即 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_{\Lambda}({}_{\Lambda}\Lambda)\leqslant\mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}E\,|\,E$ 是内射右 Λ-模$\}$.

定理 2.5.13 设 Λ 是左凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左 GQF-环；

(ii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(\Lambda/I,\Lambda)=0$，$I$ 是 Λ 的任意 f. g. 左理想；

(iii) 每个内射右 Λ-模是平坦的；

(iv) 每个平坦左 Λ-模是 FP-内射模；

(v) 每个投射左 Λ-模是 FP-内射模；

(vi) 每个右 Λ-模是某个平坦右 Λ-模的子模.

证明 (i)⇒(ii) 因 Λ 是左自 FP-内射的，且 Λ/I 是 f. p. 左 Λ-模，故 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(\Lambda/I,\Lambda)=0$，其中 I 是 Λ 的任意 f. g. 左理想.

(ii)⇒(iii) 设 I 是 Λ 的任意 f. g. 左理想，E 是任意内射右 Λ-模. 因 Λ 是左凝聚环，Λ/I 是 f. p. 左 Λ-模，故由对偶公式得

$$\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(E,\Lambda/I)=\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda,E),\Lambda/I)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(\Lambda/I,\Lambda),E).$$

又由(ii)知，$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(\Lambda/I,\Lambda)=0$. 于是得 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(E,\Lambda/I)=0$. 因而由定理 2.2.1 知，$E$ 是平坦模.

(iii)⇒(i) 由命题 2.5.12 直接推得.

(i)⇒(iv) 由引理 2.5.10 即得.

(iv)⇒(v)⇒(i) 都是显然的.

(iii)⇒(vi) 因每个右 Λ-模是某个内射右 Λ-模的子模，故由(iii)知(vi)成立.

(vi)⇒(iii) 设 E 是内射右 Λ-模，由(vi)得正合列 $0\to E\to U\to$

$U/E\to 0$，其中 U 是平坦右 Λ-模. 又由定理 1.1.4 得 $U\cong E\oplus U/E$. 因此 E 是平坦模.

显然，定理 2.5.13 改进了定理 2.5.11 的结论，并且右 IF-环与左 GQF-环是等价的.

命题 2.5.14 设 Λ 是左 GQF-环，$0\to A\to B\to C\to 0$ 是左 Λ-模的正合列. 若 A、B、C 中任意两个是平坦模，则第三个也是平坦模.

证明 由定理 2.2.2 知，对于任意环来说，若 A、C 平坦，则 B 平坦；若 B、C 平坦，则 A 平坦. 因此，仅需证 A、B 平坦时，C 也是平坦的. 设 K 是任意右 Λ-模，因 Λ 是左 GQF-环，由定理 2.5.13 知，存在平坦模 U，使得序列

$$0\to K\to U\to U/K\to 0 \tag{7}$$

正合. 由正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，得正合列

$$\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(U/K,B)\to \mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(U/K,C)\to \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(U/K,A). \tag{8}$$

因 A、B 是平坦模，故应用定理 2.2.2 知，(8)中首尾两项等于零. 于是得 $\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(U/K,C)=0$. 又根据(7)得正合列

$$\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(U/K,C)\to \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K,C)\to \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(U,C).$$

因 U 是平坦模，故又得 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(U,C)=0$. 于是 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K,C)=0$. 故 C 是平坦模.

推论 2.5.15 设 Λ 是左 GQF-环，A 是左 Λ-模，则 $\mathrm{fd}A=0$ 或∞.

证明 直接由命题 2.5.14 推得.

命题 2.5.16 设 Λ 是左凝聚环，A 是 f.p. 左 Λ-模，n 是非负整数，则 $\mathrm{pd}A\leqslant n\Leftrightarrow$对任意 f.p. 左 Λ-模 B，皆有 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)=0$.

证明 必要性是显然的. 下面对 n 用数学归纳法证明充分性.

若 $n=0$，因 Λ 是左凝聚环，故 A 是 f.p. 的. 于是存在左 Λ-模的短正合列

$$0\to A_1\to F\to A\to 0, \tag{9}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，A_1 是 f.p. 的. 由(9)又得正合列

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(F,A_1)\to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A_1,A_1)\to \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A,A_1).$$

由于 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A,A_1)=0$，因此 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(F,A_1)\to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A_1,A_1)$是满同态. 故序列(9)是分裂正合的. 于是知 A 是投射模，即 $\mathrm{pd}A\leqslant 0$.

若 $n\geqslant 1$，对任意 f. p. 左 Λ-模 B，由(9)得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A_1,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,B).$$

因 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)=\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,B)=0$，故得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A_1,B)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0.$$

由归纳法假设知，$\mathrm{pd}A_1\leqslant n-1$. 又根据定理 2. 1. 2，得 $\mathrm{pd}A\leqslant n$.

推论 2. 5. 17 设 Λ 是左凝聚环，A 是非零 f. p. 左 Λ-模，n 为非负整数. 若 $\mathrm{pd}A=n$，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda)\neq 0$.

证明 因 $\mathrm{pd}A=n$，故由命题 2. 5. 16 知，存在 f. p. 左 Λ-模 B，使得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\neq 0$. 又因 Λ 是左凝聚环，B 是 f. p. 的，故存在 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to B\to 0,$$

其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 f. p. 的. 由此得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,F)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,K).\tag{10}$$

因 $\mathrm{pd}A=n$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,K)=0$. 从而由(10)得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,F)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\to 0.\tag{11}$$

若 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda)=0$，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,F)=0$，并由(11)得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)=0$. 这就导出矛盾，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda)\neq 0$.

命题 2. 5. 18 设 Λ 是左(右)凝聚环，且 $\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda<\infty$，则

$\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda$ ($\mathrm{r.\,FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda_\Lambda)=\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda$).

证明 设 Λ 是左凝聚环，且 $\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda=n<\infty$. 因 Λ 是左凝聚环，故由定理 2. 5. 5，得 $\mathrm{l.\,f.\,p.\,gl.\,dim}\Lambda=n$. 所以 $\mathrm{l.\,FP\text{-}I.\,dim}\Lambda\leqslant n$. 下面仅需证明 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)\geqslant n$ 即可. 因 $\mathrm{l.\,f.\,p.\,gl.\,dim}\Lambda=n$，故必存在 f. p. 左 Λ-模 A，使 $\mathrm{pd}A=n$. 由推论 2. 5. 17 知，$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda)\neq 0$. 根据命题 2. 5. 9 知，$\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)\geqslant n$. 于是得 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda$.

若 Λ 是右凝聚环，则由定理 2. 5. 5，得

$$\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{r.\,FP\text{-}I.\,dim}\Lambda=\mathrm{r.\,f.\,p.\,gl.\,dim}\Lambda=n.$$

再由上面的证明知，$\mathrm{r.\,FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda_\Lambda)\geqslant n$. 故有 $\mathrm{r.\,FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda_\Lambda)=\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda$.

定理 2. 5. 19 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 VN 正则环;

(ii) Λ 是左 GQF-环, $W.gl.\dim\Lambda<\infty$;

(iii) Λ 是右 GQF-环, $W.gl.\dim\Lambda<\infty$;

(iv) Λ 是左半遗传环, Λ 是左自 FP-内射的;

(v) Λ 是右半遗传环, Λ 是右自 FP-内射的.

证明 (i)$\Rightarrow$(iv) 由定理 1.4.15 知, Λ 是左半遗传环. 又由定理 1.4.13 知, VN 正则环 Λ 上每个右 Λ-模是平坦模. 因而每个内射右 Λ-模是平坦模, 且 Λ 是左凝聚环. 再由命题 2.5.12, 得 $l.FP\text{-}Id_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=0$, 即 Λ 是左自 FP-内射.

(iv)$\Rightarrow$(ii) 因 Λ 是左半遗传环, 故由定理 2.3.17, 得 $W.gl.\dim\Lambda\leqslant 1$, 且 Λ 是左凝聚环. 又知 Λ 是左自 FP-内射的, 故 Λ 是左 GQF-环, $W.gl.\dim\Lambda<\infty$.

(ii)$\Rightarrow$(i) 因 Λ 是左凝聚环, 且 $W.gl.\dim\Lambda<\infty$, 故由命题 2.5.18, 得

$$W.gl.\dim\Lambda=l.FP\text{-}Id_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=0.$$

因而由定理 2.3.14 知, Λ 是 VN 正则环.

同理可证(i)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i)成立.

推论 2.5.20 若 Λ 是左(右)GQF-环, 则

$$W.gl.\dim\Lambda=l.f.p.gl.\dim\Lambda=0 \text{ 或 } \infty$$

$$(W.gl.\dim\Lambda=r.f.p.gl.\dim\Lambda=r.FP\text{-}I.\dim\Lambda=0 \text{ 或 } \infty).$$

推论 2.5.21 若 $W.gl.\dim\Lambda<\infty$, 则 Λ 是左 GQF-环当且仅当 Λ 是右 GQF-环.

推论 2.5.22 设 Λ 是左(或右)GQF-环, 则 Λ 是左半遗传的当且仅当 Λ 是右半遗传的.

第三章

Noether 环上的模及其同调维数

这一章我们将研究 Noether 环的同调维数. 首先讨论一般 Noether 环及其模的同调性质, 然后介绍交换(非交换)Noether 局部(拟局部)环的同调维数计算法则, 并引进 Codh 维数, 最后证明正则局部环是唯一分解整环, 并给出整体维数有限的交换 Noether 环的结构.

本章所指的环都是左(或右)Noether 环. 因左 Noether 环上每个 f. g. 左模的子模是 f. g. 的, 故它是左凝聚环. 由于每个 f. p. 左模就是 f. g. 模, 因此,前两章有关凝聚环和 f. p. 模的结论,对 Noether 环也是成立的.

3.1 Noether 环上的模

本节主要讨论 Noether 环上 f. g. 模的同调性质.

命题 3.1.1 设 Λ 是左 Noether 环, $n(>0)$是整数, A 是 f. g. 左 Λ-模, 则 $\mathrm{pd}_\Lambda A<n$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)=0$, $\forall$ f. g. 左 Λ-模 B.

证明 由命题 2.5.16 直接推得.

命题 3.1.2 设 Λ 是左 Noether 环, A 是 f. g. 左 Λ-模, 则 $\mathrm{fd}A=\mathrm{pd}A$.

证明 由命题 2.5.4 直接推得.

命题 3.1.3 设 Λ 是左 Noether 环, $\{A_i \mid i\in I\}$是右 Λ-模族, 则

$$\mathrm{r.\,fd}_\Lambda\left(\prod_{i\in I}A_i\right)=\mathrm{Sup}_i\{\mathrm{r.\,fd}_\Lambda A_i\}.$$

证明 由于 Λ 是左 Noether 环，因此对任意 f. g. 左 Λ-模 B，必有

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda\left(\prod A_i, B\right) \cong \prod \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A_i, B).$$

令 $n = \operatorname{Sup}_i\{\mathrm{r.\,fd}_\Lambda A_i\}$，由定理 2. 2. 1 知，必有一个 $A_j \in \{A_i \mid i \in I\}$，使 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A_j, C) \neq 0$，其中 C 是某个 f. g. 左 Λ-模，并且有

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A_i, B) = 0, \forall \text{ f. g. 左 } \Lambda\text{-模 } B, i \in I.$$

所以 $\mathrm{r.\,fd}_\Lambda\left(\prod_{i\in I} A_i\right) - n$.

定理 3. 1. 4 设 Λ 是左和右 Noether 环，A 是 f. g. 右 Λ-模，且 $\mathrm{pd}A < \infty$，则 $\mathrm{pd}A = n$ 当且仅当以下条件成立：

(i) $\mathrm{Tor}_{n+i}^\Lambda(A, S) = 0$，$\forall$ 单纯左 Λ-模 S，$i \geqslant 1$；

(ii) 存在一个单纯左 Λ-模 K，使 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K) \neq 0$.

证明 假定 $\mathrm{pd}A = n$，因 Λ 是右 Noether 环，故由命题 3. 1. 2 知，$\mathrm{fd}A = n$. 因而根据定理 2. 2. 1，(i)成立，同时必存在 Λ 的一个左理想 I，使得

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, \Lambda/I) \neq 0. \tag{1}$$

由于 Λ 是左 Noether 环，因此必存在适合(1)的 Λ 的极大左理想，不妨设为 I. 若 Λ/I 是单纯左 Λ-模，则(ii)成立．否则，令 $\{I_\alpha \mid \alpha \in H\}$，其中每个 I_α 是 Λ 的真左理想，且 $I \subset I_\alpha$，记 $T = \bigcap_{\alpha\in H} I_\alpha$. 若 $I = T$，则必有正合列

$$0 \to \Lambda/I \to \prod_{\alpha\in H} \Lambda/I_\alpha \to X \to 0.$$

因而又得正合列

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A, X) \to \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, \Lambda/I) \to \mathrm{Tor}_n^\Lambda\left(A, \prod_{\alpha\in H} \Lambda/I_\alpha\right). \tag{2}$$

因 $\mathrm{fd}A = n$，故 $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A, X) = 0$. 并且，由于 Λ 是右 Noether 环，A 是 f. g. 的，因此得

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda\left(A, \prod_{\alpha\in H} \Lambda/I_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha\in H} \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, \Lambda/I_\alpha) = 0.$$

这样，由(2)知 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, \Lambda/I) = 0$. 这与 I 的选择相矛盾，故$I \subset T$，且 T/I 是单纯左 Λ-模．令 $K = T/I$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{Inc} \Lambda/I \to \Lambda/T \to 0,$$

因而又得正合列

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Lambda/I)\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Lambda/T).$$

根据 I 的选择知 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Lambda/T)=0$. 于是得 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,K)\neq 0$.

反过来，由(ii)知 $\mathrm{pd}A\geqslant n$. 若 $\mathrm{pd}A=m>n$，则由上面证明知，必存在一个单纯左 Λ-模 S，使 $\mathrm{Tor}_m^\Lambda(A,S)\neq 0$. 这与题设(i)相矛盾，故 $\mathrm{pd}A=n$.

命题 3.1.5 设 Λ 是交换 Noether 环，A、B 是 f. g. Λ-模，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$，$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)$和 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)$都是 f. g. 的.

证明 因 Λ 是交换环，故 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$是 Λ-模. 又因 A 是 f. g. 的，故必有正合列 $F\to A\to 0$，其中 F 是 f. g. 自由模. 因$\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$左正合，故得正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(F,B).$$

但 $F=\bigoplus_{i=1}^n\Lambda_i$，$\Lambda_i={}_\Lambda\Lambda$，于是得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda(F,B)&\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n\Lambda_i,B)\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_i,B)\\&\cong\bigoplus_{i=1}^n B_i,\end{aligned}$$

这里 $B_i=B$，$i=1,2,\cdots,n$. 又知 B 为 f. g. 的，故$\bigoplus_{i=1}^n B_i$ 也是 f. g. 的. 因此 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$是 Noether 环上 f. g. 模的子模. 所以它是有限生成的.

其次，因 Λ 是 Noether 环，且 A 是 f. g. 的，故 A 有自由分解

$$\cdots\longrightarrow F_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}F_n\xrightarrow{d_n}F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\xrightarrow{d_1}F_0\longrightarrow 0,$$

其中每个 F_i 是 f. g. 自由 Λ-模. 因而得到一个复形

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(F_{n-1},B)\xrightarrow{d_n^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(F_n,B)\xrightarrow{d_{n+1}^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(F_{n+1},B)\longrightarrow\cdots,$$

其中 $d_{n+1}^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(d_{n+1},B)$，$d_n^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(d_n,B)$.

$$\therefore\quad \mathrm{Ext}_\Lambda^n=(A,B)=\mathrm{Ker}d_{n+1}^*/Imd_n^*.$$

因每个 F_i 是 f. g. 的，B 也是 f. g. 的，故由上面的证明可知，每个 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F_i,B)$是 f. g. 的，$i=0,1,2,\cdots$. 又因 Λ 是 Noether 环，故f. g. 模 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F_{n+1},B)$的子模 $\mathrm{Ker}d_{n+1}^*$和 $\mathrm{Im}d_n^*$ 是 f. g. 的. 因此它们的商模 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)$是 f. g. 的.

类似地，可以证明 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)$是 f. g. 的.

引理 3.1.6 设 Λ 是交换环，S 是 Λ 的元素的乘法闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$. 若 A 是 Λ—模，则 $\mathrm{pd}_{\Lambda_S}(A_S)\leqslant \mathrm{pd}_\Lambda A$.

证明 若 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\infty$，则结论显然成立. 若 $\mathrm{pd}_\Lambda A=n\geqslant 0$，则存在 Λ-模的正合列

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0,$$

其中每个 P_i 是投射模. 由于函子$(-)_S$是正合的，因此得 Λ_S-模的正合列

$$0\to(P_n)_S\to(P_{n-1})_S\to\cdots\to(P_1)_S\to(P_0)_S\to A_S\to 0.$$

因为函子$(-)_S$保持投射性，所以每个$(P_i)_S$是投射 Λ_S-模. 于是得 $\mathrm{pd}_{\Lambda_S}A_S\leqslant n$.

综合以上讨论，就得 $\mathrm{pd}_{\Lambda_S}(A_S)\leqslant \mathrm{pd}_\Lambda A$.

定理 3.1.7 设 Λ 是交换 Noether 环，A 是 f.g. Λ-模，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A=\operatorname*{Sup.}_{m}\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m),\forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda).$$

证明 首先，由引理 3.1.6，得

$$\operatorname*{Sup.}_{m}\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m)\leqslant \mathrm{pd}_\Lambda A.$$

其次，假定$\operatorname*{Sup.}_{m}\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m)=n(\geqslant 0)$，因 Λ_m 是 Noether 环，A_m 是 f.g. Λ_m-模，故 $\mathrm{fd}_{\Lambda_m}A_m=\mathrm{pd}_{\Lambda_m}A_m\leqslant n$. 于是对任意 Λ-模 B 必有

$$[\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,B)]_m\cong \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda_m}(A_m,B_m)=0,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda).$$

因而得 $\mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda(A,B)=0$. 故 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A\leqslant n$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\operatorname*{Sup.}_{m}\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m)$.

推论 3.1.8 设 Λ 是交换 Noether 环，m 是它的一个极大理想，则 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m)=\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(\Lambda/m)_m$.

证明 作 Λ-模的正合列 $0\to m\to\Lambda\to\Lambda/m\to 0$，设 m^* 也是 Λ 的一个极大理想，于是经局部化得 Λ_{m^*}-模的正合列

$$0\to m_{m^*}\to\Lambda_{m^*}\to(\Lambda/m)_{m^*}\to 0.$$

若 $m\neq m^*$，则 $m\not\subseteq m^*$，且存在 $\mu\in m,\mu\notin m^*$. 因此$\left[\frac{\mu}{1}\right]$在分式环 Λ_{m^*} 内有逆元. 故 $\mathrm{Im}(m_{m^*}\to\Lambda_{m^*})=\Lambda_{m^*}$. 于是得$(\Lambda/m)_{m^*}=0$.

若 $m=m^*$，则 $\mathrm{Im}(m_{m^*}\to\Lambda_{m^*})$是分式环 Λ_{m^*} 的一个极大理想. 但

是有

$$(\Lambda/m)_{m^*} \cong \Lambda_{m^*}/\mathrm{Im}(m_{m^*} \to \Lambda_{m^*}),$$

且 $\mathrm{Im}(m_{m^*} \to \Lambda_{m^*})$ 是局部环 Λ_{m^*} 的极大理想，所以 $(\Lambda/m)_{m^*}$ 是一个域.

由于 Λ 是交换 Noether 环，因此根据定理 3.1.7，得

$$\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m) = \operatorname*{Sup}_{m^*}.\, \mathrm{pd}_{\Lambda_{m^*}}(\Lambda/m)_{m^*}, \forall\ m^* \in \mathrm{Max}(\Lambda).$$

因为当 $m \neq m^*$ 时，$(\Lambda/m)_{m^*} = 0$，所以 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m) = \mathrm{pd}_{\Lambda_m}(\Lambda/m)_m$.

3.2 Noether 环的整体维数

从这节开始，我们将研究 Noether 环的整体维数的基本性质和计算法则. 有限整体维数与环的结构性质有密切联系，这里我们讨论有限整体维数的 Noether 环，下一节将进一步研究正则局部环.

命题 3.2.1 设 Λ 是左 Noether 环，$n(\geqslant 0)$是整数，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B) = 0,\ \forall\ \text{f.g. 左 } \Lambda\text{-模 } A,B.$$

证明 若 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda \leqslant n$，则由定理 2.3.1 知，对任意 f.g. 左 Λ-模 A,B，必有 $\mathrm{Ex}_\Lambda^{n+1}(A,B) = 0$.

反过来，设 I 是 Λ 的任意左理想，则 Λ/I 是 f.g. 的. 故由题设得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,B) = 0, \forall$ f.g. 左Λ-模B. 因Λ是Noether环，故根据命题 3.1.1 知，$\mathrm{l.pd}_\Lambda(\Lambda/I) \leqslant n$. 于是应用定理 2.3.1，即得$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda \leqslant n$.

定理 3.2.2 设 Λ 是左 Noether 环，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{l.gl.dim}\Lambda.$$

若 Λ 是右 Noether 环，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{r.gl.dim}\Lambda.$$

特别地，若 Λ 是左和右 Noether 环，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda = \mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{r.gl.dim}\Lambda.$$

证明 显然只需证 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda \geqslant \mathrm{l.gl.dim}\Lambda$. 若 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \infty$，结论已成立. 假定 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = n < \infty$，由定理 2.3.2 知，对任意 f.g. 左 Λ-模 A，必有 $\mathrm{fd}A \leqslant n$，并且存在一个 f.g. 左 Λ-模 B，使 $\mathrm{fd}B = n$. 但 Λ 是左 Noether 环，由命题 3.1.2，得

$$\mathrm{fd}A=\mathrm{pd}A\leqslant n,$$

$$\mathrm{fd}B=\mathrm{pd}B=n.$$

并由定理 2.3.1 知，$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=n$.

同理，若 Λ 是右 Noether 环，则必有 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.gl.dim}\Lambda$.

由上面证明知，若 Λ 是左和右 Noether 环，则必有

$$\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.gl.dim}\Lambda.$$

定义 设 Λ 是环，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$. 若 λ_1 是 Λ 的一个正规、正则元，且 $\lambda_i+(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1})$ 是 $\Lambda/(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1})$ 的正规、正则元，$i=2,3,\cdots,n$，则称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 Λ-序列.

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 Λ-序列，且 $\lambda_i\in J(\Lambda),i=1,2,\cdots,n$，则称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为正规 Λ-序列.

定理 3.2.3 设 Λ 是左 Noether 环，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ 是正规 Λ-序列，并记 $I=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 若 $\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)$有限，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=n+\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I).$$

证明 对 n 作数学归纳法. 若 $n=1$，由定理 2.3.4 知结论成立. 若 $n\geqslant2$，令 $\Lambda^*=\Lambda/(\lambda_1)$，$\lambda_i^*=\lambda_i+(\lambda_1),i=2,3,\cdots,n$，则 $\lambda_2^*,\lambda_3^*,\cdots,\lambda_n^*$ 是 Λ^*-序列. 因 $\lambda_i\in J(\Lambda)$，故由命题 1.6.4 可知，$\lambda_i^*\in J(\Lambda^*)$，且 $\lambda_2^*,\lambda_3^*,\cdots,\lambda_n^*$ 是正规 Λ^*-序列. 又 Λ 是左 Noether 环，因而 Λ^* 也是左 Noether 环. 由归纳法假设，得

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda^*=(n-1)+\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda^*/(\lambda_2^*,\lambda_3^*,\cdots,\lambda_n^*)).$$

于是

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=1+\mathrm{l.gl.dim}\Lambda^*=n+\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda^*/(\lambda_2^*,\lambda_3^*,\cdots,\lambda_n^*)).$$

但是 $\Lambda^*/(\lambda_2^*,\lambda_3^*,\cdots,\lambda_n^*)$与 $\Lambda/(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$是同构的，所以有

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=n+\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I).$$

定理 3.2.4 设 Λ 是左、右 Noether 环. 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$，则存在一个单纯左 Λ-模 S，使得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.pd}_\Lambda S$.

证明 设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=n$，则存在一个 $f.g.$ 右 Λ-模 A，使$\mathrm{r.pd}_\Lambda A=n$. 由定理 3.1.4 知，存在一个单纯左 Λ-模 S，使$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,S)\neq0$. 故 $\mathrm{l.fd}_\Lambda S\geqslant n$. 但 Λ 是左 Noether 环，$\mathrm{l.fd}_\Lambda S=\mathrm{l.pd}_\Lambda S\leqslant n$，于是得$\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.pd}_\Lambda S$.

推论 3.2.5 设 Λ 是左和右 Noehter 环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$，则

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{n \mid \mathrm{Ext}^n_\Lambda(S,\Lambda)\neq 0,\ S \text{ 是任意单纯左 } \Lambda\text{-模}\}.$$

证明 设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=n$，因 Λ 是左和右 Noether 环，故由定理 3.2.4 知，存在一个单纯左 Λ-模 A，使 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=n$. 又由推论 2.5.17，得 $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,\Lambda)\neq 0$. 所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{n \mid \mathrm{Ext}^n_\Lambda(S,\Lambda)\neq 0$，$S$ 是任意单纯左 Λ-模$\}$.

定理 3.2.6 设 Λ 是左 Noether 环，且 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda<\infty$，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda).$$

证明 首先，由定理 3.2.2 和命题 2.5.18，得

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda).$$

其次，设 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=n$，因此存在一个 f.g. 左 Λ-模 A，使$\mathrm{l.pd}_\Lambda A=n$. 因 Λ 是左 Noether 环，故由推论 2.5.17 知，$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,\Lambda)\neq 0$. 故 $\mathrm{l.Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)\geqslant n$. 但是 $\mathrm{l.Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)\leqslant \mathrm{l.gl.dim}\Lambda$，所以 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$.

推论 3.2.7 设 Λ 是左和右 Noether 环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{gl.dim}\Lambda &=\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{r.FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda_\Lambda)\\ &=\mathrm{l.Id}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)=\mathrm{r.Id}_\Lambda(\Lambda_\Lambda).\end{aligned}$$

引理 3.2.8 设 Λ 是交换环，S 是 Λ 的元素的乘法闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_s\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda$. 特别地，若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_s<\infty$.

证明 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\infty$，则结论成立是显然的. 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=n<\infty$，令 A 是任意 Λ_s-模，并对任意 $\lambda\in\Lambda$，$a\in A$，定义 $\lambda a=\left[\frac{\lambda}{1}\right]a$，则 A 也是 Λ-模，并且由引理 3.1.6 知，$\mathrm{pd}_{\Lambda_s}(A)\leqslant\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant n$. 所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_s\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda$.

定理 3.2.9 设 Λ 是交换 Noether 环，则

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}_m\,\mathrm{gl.dim}\Lambda_m,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda).$$

证明 由引理 3.2.8，得

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda_m\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda).$$

其次，令$\mathrm{Sup}_m.\ \mathrm{gl.dim}\Lambda_m=n(\geqslant 0)$. 因 Λ 是 Noether 环，故$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda$

$=\text{gl.}\dim\Lambda$，$\text{gl.}\dim\Lambda_m=\text{W.}\,\text{gl.}\dim\Lambda_m\leqslant n$. 于是对任意 Λ-模 A,B，得

$$[\text{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(A,B)]_m\cong\text{Tor}_{n+1}^{\Lambda_m}(A_m,B_m)=0,\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda).$$

所以 $\text{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(A,B)=0$. 又由定理 2.3.2，可得

$$\text{gl.}\dim\Lambda=\text{W.}\,\text{gl.}\dim\Lambda\leqslant n.$$

$$\therefore\quad \text{gl.}\dim\Lambda=\text{Sup}_m.\,\text{gl.}\dim\Lambda_m,\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda).$$

3.3 Noether 拟局部环上的模

这一节，我们讨论 Noether 拟局部环及其模的同调性质. 假定 Λ 是拟局部环，J 表示它的 Jacobson 根，则 Λ/J 是除环，且 J 为 Λ 的唯一极大理想.

引理 3.3.1 设 Λ 是拟局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模. 若 $\text{Hom}_\Lambda(A,\Lambda/J)=0$，则 $A=0$.

证明 若 $A\neq 0$，则由 Nakayama 引理知，$A/JA\neq 0$. 于是得正合列

$$0\to\text{Ker}\varphi\to A\xrightarrow{\varphi}A/JA\to 0.$$

由函子 $\text{Hom}_\Lambda(-,\Lambda/J)$，得正合列

$$0\to\text{Hom}_\Lambda(A/JA,\Lambda/J)\to\text{Hom}_\Lambda(A,\Lambda/J)\to\text{Hom}_\Lambda(\text{Ker}\varphi,\Lambda/J).\quad(1)$$

但已知 $\text{Hom}_\Lambda(A,\Lambda/J)=0$，由(1)得 $\text{Hom}_\Lambda(A/JA,\Lambda/J)=0$. 因 A/JA 是 f.g. 左 Λ/J-模，且 Λ/J 是除环，故 A/JA 是 f.g. 自由 Λ/J-模. 于是得

$$A/JA\cong\Lambda/J^{(n)},n\ \text{是一个自然数}.$$

$$\therefore\quad \text{Hom}_\Lambda(A/JA,\Lambda/J)\cong\bigoplus_{i=1}^n A_i.$$

这里 $A_i=\text{Hom}_\Lambda(\Lambda/J,\Lambda/J)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$. 因而 $\text{Hom}_\Lambda(A/JA,\Lambda/J)\neq 0$. 这就导出矛盾，故 $A=0$.

定理 3.3.2 设 Λ 是左 Noether 拟局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是投射模；

(ii) A 是平坦模；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J)=0$;

(iv) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$.

证明 由命题 3.1.2 知，$\mathrm{fd}A=\mathrm{pd}A$. 故(i)⇔(ii)成立. 另外，(i)⇒(iii)成立也是显然的.

(iv)⇔(iii) 因 Λ 是左 Noether 环，A 是 f.g. 左 Λ-模，故得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/J,Q/Z),A)\cong\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J),Q/Z),$$

其中 Q 是有理数环，Z 是整数环. 又因 Λ/J 是除环，故

$$\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/J,Q/Z)\cong\bigoplus_{\alpha\in I}B_\alpha,\text{ 其中 }B_\alpha\cong\Lambda/J,\ \forall\ \alpha\in I.$$

于是得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_Z(\Lambda/J,Q/Z),A)&\cong\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\bigoplus_{\alpha\in I}B_\alpha,A)\\&\cong\bigoplus_{\alpha\in I}\mathrm{Tor}_1^\Lambda(B_\alpha,A).\end{aligned}$$

因而有

$$\bigoplus_{\alpha\in I}\mathrm{Tor}_1^\Lambda(B_\alpha,A)\cong\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J),Q/Z),B_\alpha\cong\Lambda/J,\forall\ \alpha.$$

因为 Q/Z 是内射余生成元，所以有

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,A)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J).$$

(iii)⇒(i) 因 Λ 是拟局部环，A 是 f.g. 的，故由引理 1.6.11 知，A 必有投射复盖(F,ψ)，F 是 f.g. 自由模，且 $\mathrm{Ker}\psi\subseteq JF$. 令 $K=\mathrm{Ker}\psi$，得正合列

$$0\to K\to F\xrightarrow{\psi}A\to 0. \tag{2}$$

显然，K 也是 f.g. 的. 由于 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J)=0$，因此从(2)必导出一个正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda/J)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(F,\Lambda/J)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(K,\Lambda/J)\to 0.$$

但是 $K\subseteq JF\subseteq F$，所以映射 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F,\Lambda/J)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(K,\Lambda/J)$可以分解为

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(F,\Lambda/J)\xrightarrow{\xi}\mathrm{Hom}_\Lambda(JF,\Lambda/J)\xrightarrow{\eta}\mathrm{Hom}_\Lambda(K,\Lambda/J).$$

这里若 $f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(F,\Lambda/J)$，则 $\xi(f)$是 f 在 JF 上的限制. 但$J(\Lambda/J)=0$，故 $\xi(f)=0$. 因此 ξ 是一个零映射. 从而满射 $\eta\xi:\mathrm{Hom}_\Lambda(F,\Lambda/J)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(K,\Lambda/J)$也是一个零映射. 所以$\mathrm{Hom}_\Lambda(K,\Lambda/J)=0$. 因而由引理 3.3.1，得 $K=0$. 这样 $\psi:F\to A$ 是一个 Λ-同构. 故 A 是投射模.

定理 3.3.3 设 Λ 是左 Noether 拟局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模，$n(\geqslant -1)$是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{pd}A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$.

证明 (ii)⇔(iii) 可仿照证明定理 3.3.2 中(iii)⇔(iv)的方法直接推得.

(i)⇒(ii) 成立是显然的.

(ii)⇒(i) 若 $n=-1$，则 $0=\mathrm{Ext}_\Lambda^0(A,\Lambda/J)=\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda/J)$. 由引理 3.3.1 知，$A=0$，故 $\mathrm{pd}A=-1$. 若 $n=0$，根据定理 3.3.2，A 是投射模，故 $\mathrm{pd}A\leqslant 0$.

现在，假设 $n\geqslant 1$，因 A 是左 Noether 环上 f.g. 模，故必存在左 Λ-模的正合列

$$0\to A_n\to F_{n-1}\to F_{n-2}\to\cdots\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，$i=0,1,\cdots,n-1$，A_n 是 f.g. 的，它是 F_{n-1} 的子模．令 $A_0=A_1,A_i=\mathrm{Im}(F_i\to F_{i-1})$，于是得短正合列

$$0\to A_1\to F_0\to A_0\to 0,$$
$$0\to A_2\to F_1\to A_1\to 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$0\to A_n\to F_{n-1}\to A_{n-1}\to 0.$$

因而又得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F_{n-1},\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A_n,\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^2(A_{n-1},\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^2(F_{n-1},\Lambda/J),$$

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^2(F_{n-2},\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^2(A_{n-1},\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^3(A_{n-2},\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^3(F_{n-2},\Lambda/J),$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F_0,\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A_1,\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A_0,\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F_0,\Lambda/J).$$

但每个 F_i 是自由模，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^m(F_i,\Lambda/J)=0,\forall\ m\geqslant 1$.

$\therefore \quad \mathrm{Ext}_\Lambda^1(A_n,\Lambda/J)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^2(A_{n-1},\Lambda/J)\cong\cdots$

$$\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J).$$

由 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$，得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A_n,\Lambda/J)=0$. 又由定理 3.3.2 知，$A_n$ 是投射模. 所以 $\mathrm{pd}A\leqslant n$.

定理 3.3.4 设 Λ 是左 Noether 拟局部环，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 显然 $\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)\leqslant\mathrm{l.gl.dim}\Lambda$.

反过来，只需讨论 $\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)=n<\infty$的情形. 由定理 2.3.1 知，$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{l.pd}_\Lambda(\Lambda/I)\mid I$ 是环 Λ 的任意左理想$\}$. 因$\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)=n$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,\Lambda/J)=0$. 由定理 3.3.3，得$\mathrm{l.pd}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant n$. 故 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant n$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)$.

定理 3.3.5 设 Λ 是左和右 Noether 拟局部环，则

$$\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.pd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 显然 $\mathrm{r.pd}_\Lambda(\Lambda/J)\leqslant\mathrm{r.gl.dim}\Lambda$.

反过来，仅需假定 $\mathrm{r.pd}_\Lambda(\Lambda/J)=n<\infty$. 因 Λ 是左和右 Noether 环，故由定理 3.2.2 知，$\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.gl.dim}\Lambda$. 因此，只需证 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant n$. 由定理 2.3.1，得

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{l.pd}_\Lambda A\mid A \text{ 是任意循环左 } \Lambda\text{-模}\}.$$

因 $\mathrm{r.pd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=n$，故由定理 2.2.1，得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$. 又因 Λ 是左 Noether 拟局部环，故由定理 3.3.3 知，$\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$. 所以有

$$\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant n.$$

推论 3.3.6 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

推论 3.3.7 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant n$;

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,\Lambda/J)=0$;

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/J,\Lambda/J)=0$.

证明 由推论 3.3.6，得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)$. 因而由定理 3.3.3

知结论成立.

定理 3.3.8 设 Λ 是交换 Noether 环，则

$$\text{gl.dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{pd}_\Lambda(\Lambda/m)\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}.$$

并且，若 m 是 Λ 的一个极大理想，则必有

$$\text{gl.dim}\Lambda_m=\text{pd}_\Lambda(\Lambda/m).$$

证明 由定理 3.2.9，得

$$\text{gl.dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{gl.dim}\Lambda_m\mid m\in\text{Max}(\Lambda)\}.$$

因 Λ 是交换 Noether 环，m 是 Λ 的极大理想，故 Λ_m 是交换 Noether 局部环. 根据推论 3.3.6，得

$$\text{gl.dim}\Lambda_m=\text{pd}_{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m)=\text{pd}_{\Lambda_m}(\Lambda/m)_m.$$

又由推论 3.1.8 知，$\text{pd}_\Lambda(\Lambda/m)=\text{pd}_{\Lambda_m}(\Lambda/m)_m$. 因而得

$$\text{gl.dim}\Lambda_m=\text{pd}_\Lambda(\Lambda/m),$$

$$\text{gl.dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{pd}_\Lambda(\Lambda/m)\mid m\in\text{Max}(\Lambda)\}.$$

3.4 余维数

在这节里，Λ 表示交换 Noether 局部环，m 是它的唯一极大理想. 我们要引进 Λ-模的余维数 $\text{Codh}_\Lambda A$，研究它的基本性质，并证明 Auslander-Buchsbaum 定理.

首先，我们推广正规 Λ-序列的概念.

定义 设 A 是 Λ-模，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$，若 α_1 关于模 A 是正则元，且 α_i 关于 $A/(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\cdots+\alpha_{i-1}A_{i-1})$是正则元，$i=2,3,\cdots,n$，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个 A-序列.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 是一个 A-序列，且 $\alpha_i\in m,i=1,2,\cdots,n$，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为正规 A-序列.

定理 3.4.1 设 A 是 f.g. Λ-模，$\alpha\in m$ 且关于 A 是正则元，则

$$\text{pd}_\Lambda(A/\alpha A)=\text{pd}_\Lambda A+1.$$

一般地，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正规 A-序列，则

$$\text{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]=\text{pd}_\Lambda A+n.$$

证明 若 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\infty$，因 α 关于 A 是正则元，故得正合列

$$0\to A\xrightarrow{\alpha i_A}A\to A/\alpha A\to 0,$$

这里 $\alpha i_A(a)=\alpha a,\forall\ a\in A$. 记 $K=\Lambda/m$，于是对任意 $i\geqslant 0$，必有正合列

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A/\alpha A,K)$$
$$\to\mathrm{Tor}_i^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_i^\Lambda(A,K). \tag{1}$$

由于 $\alpha\in m$，且 $K=\Lambda/m$，因此得

$$\mathrm{Tor}_i^\Lambda(\alpha i_A,i_K)=\mathrm{Tor}_i^\Lambda(i_A,\alpha i_K)=0.$$

同理 $$\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(\alpha i_A,i_K)=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\mathrm{Ker}\,[\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A/\alpha A,K)]\\ &=\mathrm{Im}[\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)]\\ &=\mathrm{Im}\ \mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(\alpha i_A,i_K)=0.\end{aligned}$$

于是由(1)得正合列

$$0\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(\Lambda/\alpha\Lambda,K)\to\mathrm{Tor}_i^\Lambda(A,K)\to 0. \tag{2}$$

又已知 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\infty$，故由定理 3.3.3，得 $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(A,K)\neq 0$，$\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A,K)\neq 0$. 因此由(2)知 $\mathrm{Tor}_{i+1}^\Lambda(A/\alpha A,K)\neq 0,\forall\ i$. 再根据定理 3.3.3，就有 $\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)=\infty$.

其次，若 $\mathrm{pd}_\Lambda A=j<\infty$，则得 $\mathrm{Tor}_j^\Lambda(A,K)\neq 0$. 而$\mathrm{Tor}_{j+1}^\Lambda(A,K)=0$，由(2)知 $\mathrm{Tor}_{j+1}^\Lambda(A/\alpha A,K)\neq 0$. 因此$\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)\geqslant j+1$. 另外，在(2)中令 $i=j+1$，因 $\mathrm{pd}_\Lambda A=j$，$\mathrm{Tor}_{j+2}^\Lambda(A,K)=\mathrm{Tor}_{j+1}^\Lambda(A,K)=0$，故 $\mathrm{Tor}_{j+2}^\Lambda(A/\alpha A,K)=0$. 所以 $\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)\leqslant j+1$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)=\mathrm{pd}_\Lambda A+1$.

对于一般情形，仅需对 n 作数学归纳法即可推得.

定义 设 A 是 Λ-模，$n>0$ 是整数. 若存在一个正规 A-序列，它共有 n 项，且任意正规 A-序列所含的项数都不超过 n，则称 A 的余同调维数(或简称为 A 的余维数)为 n，记作 $\mathrm{Codh}_\Lambda A=n$.

定义 设 Λ 是交换 Noether 局部环，m 是它的唯一极大理想，若存在一个极大严格递降链

$$P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_n,$$

这里 $P_0=m$，$P_i(1\leqslant i\leqslant n)$是素理想，则把 n 称为环 Λ 的 Krull 维数，

记作 $\mathrm{Kd}\Lambda$ 或 $\mathrm{Dim}\Lambda$.

命题 3.4.2* 设 Λ 是交换 Noether 局部环，m 是它的极大理想，若 $\alpha\in m$ 是 Λ 的正则元，则

$$\mathrm{Kd}\Lambda=\mathrm{Kd}(\Lambda/(\alpha))+1$$

（文献[66]9.4 命题 4*）.

引理 3.4.3 设 $\mu\in m$ 是 Λ 的正则元，令 $\Lambda^*=\Lambda/(\mu)$，则

$$\mathrm{Codh}\Lambda\geqslant\mathrm{Codh}_{\Lambda^*}\Lambda^*+1.$$

证明 令 $n=\mathrm{Codh}_{\Lambda^*}(\Lambda^*)$，$m^*$ 是 Λ^* 的极大理想. 由定义知，必存在 $\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_n^*\in m^*$ 是正规 Λ^*-序列，其中每个 $\mu_i\in m$，它在 Λ^* 内的象是 μ_i^*. 于是得

$$\Lambda/(\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_i)\cong\Lambda^*/(\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_i^*),0\leqslant i<n. \qquad (3)$$

因此，若 $\mu_{i+1}\bar{x}=0,\bar{x}\in\Lambda/(\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_i)$，则 $\mu_{i+1}^*\overline{x^*}=0$，这里 $\overline{x^*}$ 是 $\bar{x}$ 在同构映射(3)下的象. 但 $\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_n^*$ 是正规 Λ^*-序列，μ_{i+1}^* 关于 $\Lambda^*/(\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_i^*)$ 是正则的，故 $\overline{x^*}=0$. 因而 $\bar{x}=0$. 于是 μ_{i+1} 关于 $\Lambda/(\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_i)$ 是正则元. 所以 $\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是正规 Λ-序列. 因此得

$$\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\geqslant n+1=\mathrm{Codh}_{\Lambda^*}\Lambda^*+1.$$

令 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_\Lambda A\mid A$ 是 f. g. Λ-模，且 $\mathrm{pd}_\Lambda A<\infty\}$. 因 Λ 是 Noether 环，故 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda$.

命题 3.4.4* 设 Λ 是交换 Noether 局部环，m 是它的极大理想. 若 A 是 f. g. Λ-模，且 A 的适合 $mB=0$ 的子模 B 仅是零子模，则 m 必含有一个元素，它关于 A 是正则元（文献[66]9.4 命题 6*）.

定理 3.4.5 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda$.

证明 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in m$ 是正规 Λ-序列，则由定理 3.4.1，得 $\mathrm{pd}_\Lambda[\Lambda/(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\Lambda]=n+\mathrm{pd}_\Lambda\Lambda=n$. 因此 $\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant\mathrm{f.gl.dim}\Lambda$. 再证 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda$. 令 $\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda=s$，对 s 作数学归纳法.

若 $s=0$，假定 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda>0$，则存在 f. g. Λ-模 A，$0<\mathrm{pd}_\Lambda A<\infty$. 通过短正合列

$$0\to B\to F\xrightarrow{\psi}A\to 0,\qquad (4)$$

其中 F 是 f.g. 自由模，可假定 $\mathrm{pd}_\Lambda A=1$，并且由于 Λ 是局部环，因此根据引理 1.6.11，又可假定(4)中(F,ψ)是 A 的投射覆盖，$B\subseteq mF$. 因 Λ 是 Noether 环，故 B 是 f.g. 的. 又因 $\mathrm{pd}_\Lambda A=1$，故 $\mathrm{pd}_\Lambda B=0$，即 B 是局部环 Λ 上的投射模. 再由定理 1.6.12 知，B 是 f.g. 自由模. 但因 $\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda=0$，任意 $\lambda\in m$ 都不是 Λ 的正则元，故根据命题 3.4.4*，存在 Λ 的一个理想 $I\neq 0$，使得 $Im=0$.

$$\therefore\quad IB\subseteq I(mF)=0.$$

这就与 B 是自由模相矛盾.

若 $s>0$，令 A 是任意 f.g. Λ-模，且 $\mathrm{pd}_\Lambda A=n$，$0<n<\infty$. 因 $\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda=s>0$，故存在 $\mu\in m$，它在 Λ 内不是零因子. 令 $\Lambda^*=\Lambda/(\mu)$，由引理 3.4.3 知，$\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\geqslant\mathrm{Codh}_{\Lambda^*}\Lambda^*+1$. 因此 $\mathrm{Codh}_{\Lambda^*}\Lambda^*\leqslant s-1$. 其次，作 Λ-模的正合列 $0\to L\to X\to A\to 0$，这里 X 是 f.g. 自由模，L 是 f.g. Λ-模. 因 $\mathrm{pd}_\Lambda A=n\geqslant 1$，故 $\mathrm{pd}_\Lambda L=n-1$. 又因 Λ 是 Noether 环，$\mu\in m$是正则、正规元，故应用定理 2.1.9，有

$$\mathrm{pd}_{\Lambda^*}(L/\mu L)=\mathrm{pd}_\Lambda L=n-1.$$

于是由归纳法假设，得 $s-1\geqslant n-1$. 因此 $n\leqslant s$. 所以

$$\mathrm{f.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda.$$

综合以上的讨论，得 $\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda$.

定理 3.4.6 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则 $\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant\mathrm{Kd}\Lambda$.

证明 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\in m$ 是正规 Λ-序列，记 $\Lambda_0=\Lambda$，$\Lambda_i=\Lambda/(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 Λ_i 仍是交换 Noether 局部环，$i=0,1,\cdots,n$. 因 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是正规 Λ-序列，故 μ_{i+1}关于 $\Lambda_i=\Lambda/(\mu_1,\cdots,\mu_i)\Lambda$ 是正则元，这里 $i<n$. 用 $\bar{\mu}_{i+1}$表示 μ_{i+1}在自然映射 $\Lambda\to\Lambda/(\mu_1,\cdots,\mu_i)\Lambda$ 下的象. 若 $\bar{\mu}_{i+1}\bar{x}=\overline{\mu_{i+1}x}=\mu_{i+1}\bar{x}=0$，则必有 $\bar{x}=0$，这里 $\bar{x}\in\Lambda_i$. 因此 $\bar{\mu}_{i+1}$是 Λ_i 的正则元. 但 $\bar{\mu}_{i+1}\in m/(\mu_1,\cdots,\mu_i)$，且 $m/(\mu_1,\cdots,\mu_i)$是 Λ_i 的极大理想，由命题 3.4.2*，得

$$\mathrm{Kd}\Lambda_i=\mathrm{Kd}[\Lambda_i/(\bar{\mu}_{i+1})]+1.$$

$$\therefore\quad \mathrm{Kd}\Lambda=n+\mathrm{Kd}[\Lambda_{n-1}/(\bar{\mu}_n)]=n+\mathrm{Kd}\Lambda_n\geqslant n.$$

因此，$\mathrm{Kd}\Lambda \geqslant \mathrm{Codh}_\Lambda \Lambda$.

由定理 3.4.5 和定理 3.4.6 知，若 Λ 是交换 Noether 局部环，则有

$$\mathrm{f.\,gl.\,dim}\Lambda = \mathrm{Codh}_\Lambda \Lambda \leqslant \mathrm{Kd}\Lambda.$$

定理 3.4.7 设 A 是 f. g. Λ-模，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda < \infty$，则 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$的充分必要条件是存在 A 的非零子模 B，使得 $mB=0$.

证明 若存在 A 的非零子模 B，且 $mB=0$. 不失一般性，可假定 B 是由单个元素 b 生成. 定义映射 $\Lambda \to B$ 使 $\lambda \mapsto \lambda b, \forall \lambda \in \Lambda$，则这个映射是一个 Λ-满同态，其核为 m. 故 $\Lambda/m \cong B$. 由定理 3.3.8，得 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda = \mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m) = \mathrm{pd}_\Lambda B$. 考虑正合列 $0 \to B \to A \to A/B \to 0$，因 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda < \infty$，故 $\mathrm{pd}_\Lambda A$ 和 $\mathrm{pd}_\Lambda(A/B)$都有限. 又因 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda = \mathrm{pd}_\Lambda B$，故由定理 2.1.2 知，$\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_\Lambda B = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$.

反过来，若 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$，且仅有 A 的零子模适合 $mB=0$，则由命题 3.4.4* 知，存在 $\mu \in m$，使得 μ 关于 A 是正则元. 根据定理 3.4.1，得

$$\mathrm{pd}_\Lambda(A/\mu A) = \mathrm{pd}_\Lambda A + 1 = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + 1.$$

这是不可能的，因此必存在 A 的非零子模 B，使得 $mB=0$.

定理 3.4.8（Auslander- Buchsbaum） 设 A 是 f. g. Λ-模，若 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda < \infty$，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A + \mathrm{Codh}_\Lambda A = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$$

证明 先证 $\mathrm{Coldh}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$. 设 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是正规 A-序列，由定理 3.4.1，得

$$\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)A] = n + \mathrm{pd}_\Lambda A. \tag{5}$$

$\because \quad \mathrm{pd}_\Lambda[A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)A] \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda,$

$\therefore \quad n + \mathrm{pd}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$

因此 $\mathrm{Codh}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda < \infty$. 其次，令 $\mathrm{Codh}_\Lambda A = n$，由(5)仅需证 $\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)A] = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$. 如果只有 $A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)A$ 的零子模适合 $mB=0$，那么由命题 3.4.4* 知，必有 $\mu_{n+1} \in m$ 是关于 $A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)A$ 的正则元. 因此 $\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}$ 是一个正规 A-序列. 所以 $\mathrm{Codh}_\Lambda A \geqslant n+1$，这与假设 $\mathrm{Codh}_\Lambda A = n$ 相矛盾. 于是存在

$A/(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)A$ 的非零子模 B，使得 $mB=0$. 故按定理 3.4.7，得

$$\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)A]=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$$

$\therefore\quad \mathrm{pd}_\Lambda A+\mathrm{Codh}_\Lambda A=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$

3.5 正则局部环

正则局部环是一类重要的经典的环，它与代数几何有密切联系．我们先定义正则局部环的概念，研究它的整体维数的性质，然后证明 Auslander-Buchsbaum-Nagata 定理，最后讨论一般的整体维数有限的交换 Noether 环．本节主要参考文献[66]、[75]和[101].

本节一开始就把 Λ 表示交换 Noether 局部环，m 是它的唯一极大理想，于是 $K=\Lambda/m$ 是一个域，称为环 Λ 的剩余类域.

令 $\varphi:\Lambda\to K=\Lambda/m$ 是自然同态，A 是任意 Λ-模，显然 A/mA 也是 Λ-模. 定义

$$\varphi(\lambda)x=\lambda x,\ \forall\ \lambda\in\Lambda, x\in A/mA,$$

易知 A/mA 是域 K 上的向量空间．若 A 是 f.g. 的，则 A/mA 也是域 K 上的有限维向量空间.

命题 3.5.1 设 A 是 f.g. Λ-模，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，令 $\bar{a}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 a_i 在自然同态 $A\to A/mA$ 下的象，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成 Λ-模 $A\Leftrightarrow \bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n$ 生成 K 上的向量空间 A/mA.

证明 必要性成立是显然的.

反之，任取 $a\in A$，$\bar{a}$ 是它在 A/mA 内的象. 由于 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n$ 生成 K 上向量空间 A/mA，因此得

$$\begin{aligned}\bar{a}&=\bar{\lambda}_1\bar{a}_1+\bar{\lambda}_2\bar{a}_2+\cdots+\bar{\lambda}_n\bar{a}_n\\&=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\cdots+\lambda_n\bar{a}_n\\&=\overline{\lambda_1a_1}+\overline{\lambda_2a_2}+\cdots+\overline{\lambda_na_n},\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i\in\Lambda(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是知 $a-(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n)\in mA$.

$\therefore\quad a\in(\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_n)+mA=B+mA,$

这里 $B=\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_n\subseteq A$. 因此 $A=B+mA$.

$\therefore\quad m(A/B)=mA/B=A/B.$

应用 Nakayama 引理，有 $A/B=0$，即 $A=B$.

$\therefore\quad A=\Lambda a_1+\Lambda a_2+\cdots+\Lambda a_n$.

推论 3.5.2 设 A 是 f.g. Λ-模，$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是它的生成集，且其真子集不再生成 A，则 n 是 K 上向量空间 A/mA 的维数.

证明 由命题 3.5.1 知，$\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n\}$是 A/mA 的一个生成集．其次，若 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n$ 是 K-线性相关的，则必有$\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n\}$的真子集生成 A/mA. 从而由命题 3.5.1 知，又有$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的真子集生成 A. 这是不可能的，故$\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n\}$是向量空间 A/mA 的一个基. 因此它的维数为 n.

现在，考虑 Λ-模 m/m^2. 由上面讨论知，m/m^2 是域 $K=\Lambda/m$ 上向量空间. 把 m/m^2 在 K 上的维数叫做环 Λ 的维数，记作 $\mathrm{Vd}\Lambda$.

因 Λ 是 Noether 环，m 是 f.g. 的，故由命题 3.5.1 知，向量空间 m/m^2是有限生成的. 从而是域 K 上有限向量空间. 故 $\mathrm{Vd}\Lambda<\infty$. 若 $\mathrm{Vd}\Lambda=0$，则 $m=m^2$. 根据 Nakayama 引理知，$m=0$. 故 Λ 是域．另外，若$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是 m 的生成集，且 $\mathrm{Vd}\Lambda=n$，则$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是 m 的一个最小生成集，即 m 中其它生成集所含元素个数不小于 n.

命题 3.5.3* 设 Λ 是交换 Noether 局部环，若 m/m^2 是域 $K=\Lambda/m$ 上 n 维向量空间，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\geqslant n$(文献[66]9.3 推论).

设 Λ 是交换 Noether 局部环，若 m/m^2 是域 K 上 n 维向量空间，则由命题 3.5.1 知，m 是由 n 个元素生成. 于是得 $\mathrm{Kd}\Lambda\leqslant n$. 又由定理 3.4.5 和定理 3.4.6，得

$$\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant\mathrm{Kd}\Lambda\leqslant\mathrm{Vd}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda. \qquad (1)$$

定义 设 Λ 是交换 Noether 局部环，若 $\mathrm{Kd}\Lambda=\mathrm{Vd}\Lambda$，则称 Λ 为一个正则局部环.

命题 3.5.4* 设 Λ 是正则局部环，若$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$是 m 的一个最小生成集，则$(0)\subset(\mu_1)\subset(\mu_1,\mu_2)\subset\cdots\subset(\mu_1,\cdots,\mu_n)$是素理想的严格递升链．特别地，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是正规 Λ-序列(文献[66]9.4 命题 5*).

定理 3.5.5 若 Λ 是正则局部环，则

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty，且\ \mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{Kd}\Lambda.$$

证明 因 Λ 是正则局部环，故由定义知，$\mathrm{Kd}\Lambda=\mathrm{Vd}\Lambda$. 令 $\mathrm{Vd}\Lambda=n$，由推论 3.5.2 知，m 必有一个生成集 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$，且它的真子集不生成 m. 因而由命题 3.5.4* 知，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是一个正规 Λ-序列. 根据定理 3.4.1，得

$$\mathrm{pd}_\Lambda[\Lambda/(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\Lambda]=n+\mathrm{pd}_\Lambda\Lambda=n.$$

因 $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\Lambda=m$，故知 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m)=n$. 但 Λ 是交换 Noether 局部环，由推论 3.3.6，得

$$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m)=\mathrm{Vd}\Lambda=\mathrm{Kd}\Lambda.$$

若 Λ 是正则局部环，则由(1)和定理 3.5.5，得

$$\mathrm{f.\,gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda=\mathrm{Kd}\Lambda=\mathrm{Vd}\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=n, \qquad (2)$$

并且 Λ 的极大理想 m 是由含有 n 个元素的正规 Λ-序列所生成.

定理 3.5.6 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则

$$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty\Leftrightarrow\Lambda \text{ 是正则局部环}.$$

证明 若 Λ 是正则局部环，则由定理 3.5.5 知，$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty$.

反之，若 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty$，则 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{f.\,gl.\,dim}\Lambda$. 由定理 3.4.5，得 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{Cod}_\Lambda\Lambda$. 又由(1)知，$\mathrm{Kd}\Lambda=\mathrm{Vd}\Lambda$. 所以 Λ 是正则局部环.

推论 3.5.7 设 Λ 是交换 Noether 局部环，则

$$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=\infty\text{，或 }\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=\mathrm{Kd}\Lambda.$$

证明 直接由定理 3.5.6 推得.

推论 3.5.8 设 Λ 是正则局部环，$P(\neq\Lambda)$是它的一个素理想，则分式环 Λ_P 也是正则局部环.

证明 首先，Λ_P 仍是交换 Noether 局部环. 因 Λ 是正则局部环，故由定理 3.5.6，得 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty$. 于是

$$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_P\leqslant\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty.$$

再由定理 3.5.6 知，Λ_P 是正则局部环.

下面，我们将证明正则局部环是唯一分解整环. 关于正则局部环是唯一分解环，有好几种证明方法. 最早的是 Nagata 于 1958 年把这个定理的证明归纳为：若整体维数为 3 的正则局部环是唯一分解环，则任意正则局部环是唯一分解环. 1959 年，Auslander 与 Buchsbaum 给出了证明(见文献[5]). 以后，关于这个定理的证明又有一些新的

方法．如 Kaplansky 于 1970 年给出的证明(见文献[52])．Matsumura 在文献[59]中，对 Kaplansky 的证法又进行一些改进．Rotman 在文献[75]中采用了前一种证法，而在文献[101]中严格地证明了所述的定理，后者所用的证明基本上采用 Matsumura 的方法．这里，我们按照 Rotman 在文献[75]中的方法证明所述的定理.

定理 3.5.9 正则局部环是整环.

证明可参考文献[101](定理 8. P. 336)，或文献[52](定理 164).

设 Λ 是任意交换环，P 是 Λ 的素理想，若不存在 Λ 的素理想 P'，使得 $P'\subset P$，则称 P 为 Λ 的最小素理想．若 Λ 是交换整环，零理想是环 Λ 的素理想，则此时所指最小素理想是环 Λ 的非零素理想中最小者.

引理 3.5.10 设 Λ 是交换 Noether 整环，则 Λ 是唯一分解环当且仅当 Λ 中任意最小素理想是主理想.

证明可参考文献[101](引理 1，P. 343).

引理 3.5.11 设 Λ 是正则局部环，$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=3$. 若 P 是 Λ 的素理想，且 $P\subset m$，则 $\mathrm{pd}_\Lambda P\leqslant 1$.

证明 令 $\Lambda^*=\Lambda/P$，由题设知存在 $\alpha\in m$ 且 $\alpha\notin P$. 若对某个 $r+P\in\Lambda^*$，$\alpha(r+P)=0$，则 $\alpha r\in P$. 因 P 是素理想且 $\alpha\notin P$，故 $r\in P$. 因此 α 关于 Λ^* 是正则元．于是知 $\mathrm{Codh}_\Lambda(\Lambda^*)\geqslant 1$. 由 Auslander-Buchsbaum 定理，得 $\mathrm{pd}_\Lambda\Lambda^*+\mathrm{Cod}_\Lambda\Lambda^*=3$. 因此 $\mathrm{Pd}_\Lambda\Lambda^*\leqslant 2$. 但序列 $0\to P\to\Lambda\to\Lambda^*\to 0$ 正合，由定理 2.1.2 知 $\mathrm{pd}_\Lambda P\leqslant 1$.

设 Λ 是任意交换环，A 是 Λ-模，B 是 A 的子模，Σ 是 Λ 的非空子集，定义 $B:_\Lambda\Sigma=\{a\in A\mid\sigma a\in B,\forall\ \sigma\in\Sigma\}$. 易知 $B:_\Lambda\Sigma$ 是 A 的一个子模．若 I 是 Λ 的一个理想，$\lambda\in\Lambda$，则 $I:_\Lambda\lambda$ 是环 Λ 的一个理想，可简记为 $I:\lambda$.

引理 3.5.12 设 Λ 是正则局部环，P 是一个最小素理想，则存在元素 $x\in P$，$y\in m$ 且 $x\notin mP$，$y\notin P$，使得 $P=(x):y$(文献[75]引理 9.63).

定理 3.5.13(Auslander-Buchsbaum-Nagata) 正则局部环必是唯一分解环.

证明 我们可假定 $\mathrm{gl.dim}_\Lambda=3$. 令 P 是一个最小素理想，由引理 3.5.11 和引理 3.5.12 知，$\mathrm{pd}_\Lambda P\leqslant 1$ 且 $P=(x):y$，这里 x 和 y 分别是 P 和 m 中某个元素，但 $x\notin mP$ 和 $y\notin P$. 我们要证明 $P=(x)$.

若 P 不是主理想，则存在 P 的一个最小生成集 $\{x,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 因 Λ 是局部环，故由引理 1.6.11 知，必有 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\xrightarrow{\psi}P\to 0, \tag{3}$$

这里，F 是秩为 $n+1$ 的自由模，它有一个基 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$，$\psi(e_0)=x$，$\psi(e_i)=x_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，K 是 f.g. 的，且 $K\subseteq mF$. 因 $\mathrm{pd}_\Lambda P\leqslant 1$，由定理 2.1.2，得 $\mathrm{pd}_\Lambda K\leqslant 0$. 若 $K=0$，则由(3)知 P 是自由模. 但 Λ 是正则局部环，故由定理 3.5.9，Λ 是整环. 因而 P 是一个主理想. 故 $K\neq 0$，它是一个 f.g. 投射模. 因而 K 是一个 f.g. 自由模. 令 $\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$ 是它的一个基，由于 $K\subseteq mF$，因此每个 s_i 可表示为

$$s_i=\sum_{j=0}^{n}\lambda_{ij}e_j,\ \lambda_{ij}\in m, 1\leqslant i\leqslant t,\ 0\leqslant j\leqslant n.$$

现在，$x_1\in P=(x):y$，根据定义，有 $z\in\Lambda$，使得 $x_1y=zx$. 令 $\alpha=ze_0-ye_1$，$\beta=x_1e_0-xe_1$，则 $\psi(\alpha)=zx-yx_1=0$，$\psi(\beta)=x_1x-xx_1=0$. 故 α，$\beta\in K$. 另外，有

$$\begin{aligned}x\alpha&=xze_0-xye_1=x_1ye_0-xye_1=y(x_1e_0-xe_1)\\&=\beta y.\end{aligned}$$

由于 $\alpha,\beta\in K$，因此有 $\alpha=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i s_i$，$\beta=\sum_{i=1}^{t}r_i s_i$. 又由 $x\alpha=\beta y$，得

$$\sum_{i=1}^{t}x\lambda_i s_i=\sum_{i=1}^{t}yr_i s_i.$$

因 $\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$ 是 K 的基，故 $x\lambda_i-yr_i$，$i=1,2,\cdots,t$. 于是 $r_i\in P=(x):y$，$\forall\ i$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \beta&=x_1e_0-xe_1=\sum_{i=1}^{t}r_is_i-\sum_{i=1}^{t}r_i\Big(\sum_{j=0}^{n}\lambda_{ij}e_j\Big)\\&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{n}r_i\lambda_{ij}e_j.\end{aligned}$$

因而

$$-x-\sum_{i=1}^{t}r_i\lambda_{i1}\in mP.$$

这与 x 的选取相矛盾，故 P 是主理想. 又由引理 3.5.10 知，Λ 是唯一分解环.

最后，我们应用上面的结果进一步研究交换 Noether 环的同调性质．这里，还需要引用交换代数中的一个结论．

命题 3.5.14 设 Λ 是任意交换环，I 是 Λ 的可分解理想，$I=\bigcap_{i=1}^{n}q_i$是一个极小准素分解，$r(q_i)=P_i$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n}P_i=\{x\in\Lambda\mid(I:x)\neq I\}.$$

特别地，若零理想 0 可分解，则 Λ 的零因子集 D 是属于 0 的素理想的并(文献[9]命题 4.7).

由此命题知，若零理想可分解，则环 Λ 的幂零元的集合是属于 0 的所有极小素理想的交.

定理 3.5.15 设 Λ 是交换 Noether 环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$，则 Λ 是有限个整环的直和.

证明 因 Λ 是交换 Noether 环，故零理想可分解. 这样 Λ 仅有有限个最小素理想，恰好就是属于 0 的所有极小素理想，假定为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$.

令 m 是 Λ 的任意极大理想，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_m<\infty$ 且 Λ_m 是交换 Noether 局部环. 由定理 3.5.6 知，Λ_m 是正则局部环. 又由定理 3.5.9 知，Λ_m是整环. 由命题 3.5.14 知，m 至多包含一个极小素理想 P_i，当 $i\neq j$ 时，$P_i+P_j=\Lambda$. 另外，$\bigcap_{i=1}^{n}P_i$ 是 Λ 的幂零元集合，且 Λ 是 Noether 环，故$\bigcap_{i=1}^{n}P_i$ 是幂零理想．若 $0\neq x\in\bigcap P_i$，令 m 是包含 $(0:x)$的极大理想，则在分式环 Λ_m 中$\left[\dfrac{x}{1}\right]\neq0$，且是一个幂零元. 这与 Λ_m 是整环相矛盾，于是得$\bigcap P_i=0$.

综合以上讨论，由中国剩余定理，得

$$\Lambda\cong\Lambda/P_1\oplus\Lambda/P_2\oplus\cdots\oplus\Lambda/P_n.$$

故 Λ 是有限个整环的直和.

定理 3.5.16 设 Λ 是交换 Noehte 环，$n(\geqslant0)$是整数，则

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant n\Leftrightarrow\Lambda_m \text{ 是正则局部环，} \mathrm{Kd}\Lambda_m\leqslant n,\forall\, m\in\mathrm{Max}(\Lambda).$$

证明 由定理 3.2.9，得

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{gl.dim}\Lambda_m\mid\forall\, m\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

于是

$$\text{gl.dim}\Lambda\leqslant n \Leftrightarrow \text{Sup}\{\text{gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m\in \text{Max}(\Lambda)\}\leqslant n$$
$$\Leftrightarrow \text{gl.dim}\Lambda_m\leqslant n,\forall\ m\in \text{Max}(\Lambda).$$

又由定理 3.5.6 和推论 3.5.7，得

$\text{gl.dim}\Lambda\leqslant n\Leftrightarrow\Lambda_m$ 是正则局部环，且 $\text{Kd}\Lambda_m\leqslant n$，$\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)$.

定理 3.5.17 设 Λ 是交换 Noether 整环，且每个 f.g. 投射 Λ-模皆是自由模，则 Λ 是唯一分解环当且仅当对任意 $x,y\in\Lambda$，皆有 $\text{pd}_\Lambda[\Lambda/(x,y)]\leqslant 2$.

证明 对任意 $x,y\in\Lambda$,可作 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\xrightarrow{\varphi}(x,y)\to 0, \tag{4}$$

其中 F 是自由模，$\{e_1,e_2\}$ 是它的基，且 $\varphi(e_1)=x$，$\varphi(e_2)=y$，而 $K=\{\lambda_1e_1+\lambda e_2\mid\lambda_1x+\lambda_2y=0\}$ 是 f.g. 的．显然，$K=(x)\cap(y)$.

若 $\text{pd}_\Lambda[\Lambda/(x,y)]\leqslant 2$，则 $\text{pd}_\Lambda(x,y)\leqslant 1$. 由(4)得 $\text{pd}_\Lambda K=0$. 因此 K 是 f.g. 投射模．又由题设 K 是自由模，但 Λ 是整环，因而 $K-(x)\cap(y)$必是 Λ 的一个主理想．这样，Λ 是 Noether 整环，且 Λ 的任意两个主理想的交仍是主理想. 故 Λ 是唯一分解环.

反之，假定 Λ 是唯一分解环．则对任意 $x,y\in\Lambda$，$(x)\cap(y)$是主理想．因 Λ 是整环，故 $K=(x)\cap(y)=(z)$是自由 Λ 模. 根据(4)就得 $\text{pd}_\Lambda[\Lambda/(x,y)]\leqslant 2$.

第四章

凝聚环的同调维数

这一章我们进一步讨论凝聚环的同调维数，主要是推广 Noether 环的一些经典的结果．首先介绍凝聚环及凝聚局部环的同调性质，然后研究同调维数有限的凝聚环的结构性质和若干$(a,2,b)$-环的分类问题．本章主要参考文献[33]、[85]、[38～39].

4.1 凝聚环上的模

命题 4.1.1 设 Λ 是左凝聚环，$0\to A\to B\to C\to 0$ 是左 Λ-模的正合列．若 A,B 和 C 中有两个是 f.p. 的，则第三个也是 f.p. 的.

证明 若 A 和 C 是 f.p. 的，则 $\lambda(A)\geqslant 1,\lambda(C)\geqslant 1$. 于是由定理 1.3.1(i)，得 $\lambda(B)\geqslant 1$. 故 B 是 f.p. 的．若 A 和 B 是 f.p. 的，则根据定理 1.3.1(ii)，C 也是 f.p. 的．若 B 和 C 是 f.p. 的，则 $\lambda(B)\geqslant 1$，$\lambda(C)\geqslant 1$. 又由定理 1.3.1(iii)，可得

$$\lambda(A)\geqslant \operatorname{Inf}\{\lambda(B),\lambda(C)-1\}\geqslant 0.$$

因此 A 是 f.p. 模 B 的 f.g. 子模，且 Λ 是左凝聚环．于是由定理 1.3.7 知 A 为 f.p. 的.

推论 4.1.2 设 Λ 是左凝聚环，A 是 f.p. 左 Λ-模，则 A 必有有限自由分解

$$\cdots\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0, \tag{1}$$

其中(1)是正合的，且每个 F_i 是 f.g. 自由模.

推论 4.1.3 设 Λ 是交换凝聚环，A,B 是凝聚 Λ-模，则对任意 n

≥ 0，$\mathrm{Ext}_A^n(A,B)$和$\mathrm{Tor}_n^A(A,B)$是凝聚模.

证明 若$n=0$，$\mathrm{Ext}_A^0(A,B)=\mathrm{Hom}_A(A,B)$，则因$A$是凝聚模，故有正合列$F_1\to F_0\to A\to 0$，其中$F_0,F_1$是f.g.自由模．因而由函子$\mathrm{Hom}_A(-,B)$又得正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(A,B)\to\mathrm{Hom}_A(F_0,B)\to\mathrm{Hom}_A(F_1,B).$$

由于

$$\mathrm{Hom}_A(F_1,B)\cong\mathrm{Hom}_A(A^{(n)},B)\cong\mathrm{Hom}_A(A,B)^{(n)}\cong B^{(n)},$$

且B是凝聚模，根据推论1.3.5知，$\mathrm{Hom}_A(F_1,B)$是凝聚模．同理$\mathrm{Hom}_A(F_0,B)$也是凝聚模．再由推论1.3.4，即知$\mathrm{Hom}_A(A,B)$同样也是凝聚模．

若$n>0$，则由推论4.1.2知，A有有限自由分解

$$\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0.$$

于是得复形

$$0\to\mathrm{Hom}_A(F_0,B)\xrightarrow{d_1^*}\mathrm{Hom}_A(F_1,B)\to\cdots.$$

$$\therefore\quad \mathrm{Ext}_A^n(A,B)=\mathrm{Ker}d_{n+1}^*/\mathrm{Im}d_n^*,$$

这里 $d_n^*=\mathrm{Hom}_A(d_n,B):\mathrm{Hom}_A(F_{n-1},B)\to\mathrm{Hom}_A(F_n,B)$，

$$d_{n+1}^*=\mathrm{Hom}_A(d_{n-1},B):\mathrm{Hom}_A(F_n,B)\to\mathrm{Hom}_A(F_{n-1},B).$$

由上面证明知$\mathrm{Hom}_A(F_{n-1},B)$，$\mathrm{Hom}_A(F_n,B)$是凝聚模，因而根据推论1.3.4可知$\mathrm{Im}d_n^*$是凝聚模．同理，$\mathrm{Ker}d_{n+1}^*$也是凝聚模. 最后，应用定理1.3.3，可知它们的商$\mathrm{Ext}_A^n(A,B)$同样也是凝聚模.

类似地，可以证明$\mathrm{Tor}_n^A(A,B)$是凝聚模.

引理 4.1.4 设A是交换环，S是A的元素的乘法闭集，$1\in S$且$0\notin S$. 若A是A-凝聚模，则A_s是A_s-凝聚模.

证明 因A是f.g.的，故A_s也是f.g.的．若B_s是A_s-模A_s的f.g.子模，则B是A-模A的f.g.子模．又因A是凝聚模，故B是f.p.的. 于是得A-模正合列

$$0\to K\to F\to B\to 0,$$

其中F为f.g.自由模，K为f.g.的. 因而又有A_s-模的正合列

$$0\to K_s\to F_s\to B_s\to 0,$$

这里 F_s 是 f.g. 自由 Λ_s-模，K_s 是 f.g. Λ_s-模. 所以 B_s 是 f.p. 的. 因此 A_s 是凝聚模.

命题 4.1.5 设 Λ 是交换环，S 是 Λ 的元素的乘法闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$. 若 Λ 是凝聚环，则 Λ_s 也是凝聚环.

证明 因 Λ 是凝聚环，故 ${}_\Lambda\Lambda$ 是凝聚模. 由引理 4.1.4 知，Λ_s 是 Λs-凝聚模. 因此 Λ_s 是凝聚环.

定理 4.1.6 设 Λ 是左凝聚环，A 是 f.p. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{pd}A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/I,A)=0$，这里 I 是 Λ 的任意 f.g. 右理想；

(iii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda/I)=0$，这里 I 是 Λ 的任意 f.g. 左理想.

证明 (i)⇒(iii) 成立是显然的.

(iii)⇒(i) 设 B 是任意 f.p. 左 Λ-模，对 B 的生成集所含元素个数 m，作数学归纳法证明 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)=0$. 若 $m=1$，因 Λ 是左凝聚环，则 $B\cong\Lambda/I$，I 是 Λ 的 f.p. 左理想. 由(iii)得 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)\cong\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda/I)=0$. 若 $m>1$，令 B' 是由 B 的生成集中前 $m-1$ 个元素生成的子模，则得正合列 $0\to B'\to B\to B/B'\to 0$. 因 Λ 是左凝聚环，故 f.p. 模 B 的 f.g. 子模 B' 也是 f.p. 的. 因而 B/B' 也是 f.p. 的. 由 $\mathrm{Ext}(A,-)$ 得正合列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(A,B')\to\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(A,B)\to\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(A,B/B')\to\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+2}(A,B')\to\cdots.$$

但是由归纳法假设知，$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(A,B')=\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(A,B/B')=0$. 于是得 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,B)=0$. 因而由命题 2.5.16 知 $\mathrm{pd}A\leqslant n$.

(i)⇔(ii) 因 Λ 是左凝聚环，故由命题 2.5.4 知 $\mathrm{pd}A=\mathrm{fd}A$. 因而根据定理 2.2.1 知(i)⇔(ii)是成立的.

定理 4.1.7 设 Λ 是交换凝聚环，若 A 是 f.p. Λ-模，则

$$\mathrm{pd}_{\Lambda}A=\mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m)\mid\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

证明 首先，由引理 3.1.6，得

$$\mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m)\mid\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}\leqslant\mathrm{pd}_{\Lambda}A.$$

反过来，可仿照定理 3.1.7 的证明，又得

$$\mathrm{pd}_\Lambda A \leqslant \mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\},$$

$$\therefore\quad \mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(A_m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

在定理 4.1.7 中，如果 Λ 是交换 Noether 环，A 是 f.g. Λ-模，就得到定理 3.1.7.

下面，把关于 Noether 环的换环定理推广到凝聚环.

定理 4.1.8 设 Λ 是左凝聚环，I 是 Λ 的理想且 $I \subseteq J(\Lambda)$，A 是 f.p. 左 Λ-模．若 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I, A)=0$，$\forall\ n>0$，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA).$$

证明 因 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I, A)=0$，$\forall\ n>0$，故由命题 2.2.5 得

$$\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA) \leqslant \mathrm{pd}_\Lambda A.$$

反过来，设 $\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=n \geqslant 0$，对 n 作数学归纳法．

如果 $n=0$，且 A/IA 是自由 Λ/I-模，令 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_m \in A/IA$ 是它的基，这里 $a_i \in A$，而 B 是由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 生成的 A 的子模，那么就有 $A=B+IA$.

$$\therefore\quad A/B=(B+IA)/B=I(A/B).$$

因 $I \subseteq J(\Lambda)$ 且 A/B 是 f.g. 的，故由 Nakayama 引理得 $A=B$. 又因 Λ 是左凝聚环，故得 Λ-模的正合列

$$0 \to K \to F \xrightarrow{\varphi} A \to 0, \tag{2}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是它的基，且 $\varphi(e_i)=a_i, i=1,2, \cdots, m$，而 K 是 f.g. 的．于是可由(2)诱导得正合列

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I, A) \to \Lambda/I \otimes_\Lambda K \to \Lambda/I \otimes_\Lambda F \xrightarrow{1_{\Lambda/I} \otimes \varphi} \Lambda/I \otimes_\Lambda A \to 0.$$

但 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I, A)=0$，且 $1_{\Lambda/I} \otimes \varphi$ 是 Λ/I-同构，于是得 $\Lambda/I \otimes_\Lambda K = K/IK=0$，即 $KI=K$. 又因 K 是 f.g. 的，且 $I \subseteq J(\Lambda)$，故 $K=0$. 因此 A 是自由模．如果 $n=0$，且 A/IA 是投射 Λ/I-模，由于 Λ 是左凝聚环，A 为 f.p. 的，那么得 Λ-模的正合列

$$0 \to K \to F \to A \to 0, \tag{3}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 的．因而又得 Λ/I-模的正合列

$$0 \to K/IK \to F/IF \to A/IA \to 0, \tag{4}$$

且 A/IA 是投射 Λ/I-模. 故(4)是分裂正合的.

$$\therefore \quad F/IF \cong K/IK \oplus A/IA \cong (K\oplus A)/I(K\oplus A).$$

因 $(K\oplus A)/I(K\oplus A)$ 是 f. g. Λ/I-自由模，由上面证明知 $K\oplus A$ 是自由 Λ-模，所以 A 是投射模.

如果 $n>0$，又作 Λ-模的正合列(3)，因而又得 Λ/I-模的正合列(4)，其中 F/IF 是自由 Λ/I-模. 因 $\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(A/IA)=n$，故 $\mathrm{pd}_{\Lambda/I}(K/IK)=n-1$，并且由 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I,A)=0$ 知 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I,K)=0, \forall\ n>0$. 而后应用归纳法假设得 $\mathrm{pd}_\Lambda K=n-1$. 于是由正合列(3)得 $\mathrm{pd}_\Lambda A=n$.

在定理 4.1.8 中，如果 Λ 是左 Noether 环，A 是 f. g. 左 Λ-模时，就得到推论 2.3.9.

引理 4.1.9 设 Λ 是任意环，I 是它的理想. 若 A 是 f. p. 左 Λ-模，则 A/IA 是 f. p. 左 Λ/I-模.

证明 因 A 是 f. p. 的，于是得正合列 $F_1\to F_0\to A\to 0$，其中 F_0, F_1 是 f. g. 自由模. 因而又有正合列

$$\Lambda/I\otimes_\Lambda F_1\to \Lambda/I\otimes_\Lambda F_0\to \Lambda/I\otimes_\Lambda A\to 0.$$

故左 Λ/I-模序列

$$F_1/IF_1\to F_0/IF_0\to A/IA\to 0$$

正合，且 $F_0/IF_0, F_1/IF_1$ 是 f. g. 自由 Λ/I-模. 所以 A/IA 是 f. p. 左 Λ/I-模.

定理 4.1.10 设 Λ 是左凝聚环，I 是 Λ 的理想且 $I\subseteq J(\Lambda)$，则

$$\text{l. f. f. p. dim}\Lambda \leqslant \text{l. f. f. p. dim}\Lambda/I + \text{r. fd}_\Lambda(\Lambda/I).$$

证明 若 l. f. f. p. dim$(\Lambda/I)=\infty$，或 r. fd$_\Lambda(\Lambda/I)=\infty$，则结论成立是显然的. 假定 l. f. f. p. dim$(\Lambda/I)=m<\infty$ 和 r. fd$_\Lambda(\Lambda/I)=n<\infty$，令 A 是任意 f. p. 左 Λ-模且 l. pd$_\Lambda A<\infty$. 因 Λ 是左凝聚环，故由推论 4.1.2 知. A 具有有限自由分解

$$\cdots\to F_s \xrightarrow{d_s} F_{s-1}\to\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1} F_0\to A\to 0, \tag{5}$$

其中每个 F_s 是 $f.g.$ 自由模. 记 $K_n=\mathrm{Ker}d_{n-1}$，则 K_n 是 f. p. 的. 因 r. fd$_\Lambda(\Lambda/I)=n$，故得

$$\mathrm{Tor}_{n+s}^\Lambda(\Lambda/I,A)=0, \forall\ s>0.$$

但是由(5)又有

$$\mathrm{Tor}_{n-s}^{\Lambda}(\Lambda/I,A)\cong\mathrm{Tor}_{s}^{\Lambda}(\Lambda/I,K_n)=0,\forall\ s>0,$$

故根据定理 4.1.8 得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K_n=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n).$$

因 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}A<\infty$，故 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K_n=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n)<\infty$. 又应用引理 4.1.9 知 K_n/IK_n 是 f.p. 左 Λ/I-模. 因此得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n)\leqslant\mathrm{l.f.f.p.dim}(\Lambda/I)=m.$$

$$\therefore\quad \mathrm{l.pd}_{\Lambda}A=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K_n+n\leqslant m+n.$$

综合以上讨论，就得

$$\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.f.f.p.dim}(\Lambda/I)+\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I).$$

引理 4.1.11 设 Λ 是左凝聚环，I 是 Λ 的 f.g. 理想，则 Λ/I 是左凝聚环.

证明 作左 Λ-模的正合列

$$0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0.$$

因 Λ 是左凝聚环，且 I 是 f.g. 的，故由定理 1.3.3 知，Λ/I 是左 Λ-凝聚模. 因而 Λ/I 也是左 Λ/I-凝聚模. 所以 Λ/I 是左凝聚环.

定理 4.1.12 设 Λ 是左凝聚环，I 是 Λ 的 f.g. 理想，且 $I\subseteq J(\Lambda)$，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{W.gl.dim}(\Lambda/I)+\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I).$$

证明 不妨假定 $\mathrm{W.gl.dim}(\Lambda/I)=m<\infty$ 和 $\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I)=n<\infty$. 令 A 是任意 f.p. 左 Λ-模，因 Λ 是左凝聚环，故由推论 4.1.2 知必有左 Λ-模的正合列

$$0\to K_n\to F_{n-1}\to F_{n-2}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，K_n 是 f.p. 的. 又因 $\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I)=n$，故

$$\mathrm{Tor}_{n-s}^{\Lambda}(\Lambda/I,A)\cong\mathrm{Tor}_{s}^{\Lambda}(\Lambda/I,K_n)=0,\forall\ s>0.$$

应用定理 4.1.8 得

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K_n=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n).$$

$$\therefore\quad \mathrm{l.pd}_{\Lambda}A=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}K_n+n=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n)+n. \tag{6}$$

但 Λ 是左凝聚环，故由引理 4.1.11 知 Λ/I 也是左凝聚环. 于是根据定理 2.5.5 得

$$\text{W. gl. dim}\Lambda = \text{l. f. p. gl. dim}\Lambda,$$
$$\text{W. gl. dim}(\Lambda/I) = \text{l. f. p. gl. dim}(\Lambda/I) = m.$$
又在(6)式中，K_n/IK_n 是 f. p. 左 Λ/I-模，$\text{l. pd}_{\Lambda/I}(K_n/IK_n) \leqslant m$，

∴ $\text{l. pd}_\Lambda A \leqslant m+n.$

综合以上讨论得
$$\text{W. gl. dim}\Lambda \leqslant \text{W. gl. dim}(\Lambda/I) + \text{r. fd}_\Lambda(\Lambda/I).$$

在定理 4.1.12 中，如果 Λ 是左 Noether 环，I 是 Λ 的理想且 $I \subseteq J(\Lambda)$，就得到定理 2.3.7(ii).

定理 4.1.13 设 Λ 是左凝聚环，λ 是 Λ 的正规、正则元，且 $\lambda \in J(\Lambda)$，则

(i) $\text{l. f. f. p. dim}\Lambda = \text{l. f. f. p. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) + 1$；

(ii) 若 $\text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) < \infty$，必有
$$\text{W. gl. dim}\Lambda = \text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) + 1.$$

证明 (i) 因 λ 是正则元，故得右 Λ-模的正合列
$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\lambda} \Lambda \to \Lambda/\lambda\Lambda \to 0,$$
这里 $\lambda: \Lambda \to \Lambda$ 使 $x \mapsto \lambda x, \forall x \in \Lambda$. 从而对任意左 Λ-模 A，必有 $\text{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda, A) = 0$. 故 $\text{r. fd}_\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda) \leqslant 1$. 再由定理 4.1.10 得
$$\text{l. f. f. p. dim}\Lambda \leqslant \text{l. f. f. p. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) + 1.$$

其次，若 $\text{l. f. f. p. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) = n < \infty$，则存在 f. p. 左 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模 B，且 $\text{l. pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda} B = n$. 但 λ 是正规、正则、非单位元，由定理 2.1.7 得 $\text{l. pd}_\Lambda B = n+1$. 又易知 B 是 f. p. 左 Λ-模，因此 $\text{l. f. f. p. dim}\Lambda \geqslant n+1$. 若 $\text{l. f. f. p. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) = \infty$，则存在 f. p. 左 $\Lambda/\lambda\Lambda$-模 B，使得
$$n \leqslant \text{l. pd}_{\Lambda/\lambda\Lambda} B < \infty.$$
从而 $\text{l. pd}_\Lambda B \geqslant n+1$. 故 $\text{l. f. f. p. dim}\Lambda = \infty$.

综合以上讨论，得
$$\text{l. f. f. p. dim}\Lambda = \text{l. f. f. p. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) + 1.$$

(ii) 首先，由定理 4.1.12，得
$$\text{W. gl. dim}\Lambda \leqslant \text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) + \text{r. fd}_\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda).$$
由(i)的证明知，$\text{r. fd}_\Lambda(\Lambda/\lambda\Lambda) \leqslant 1$，

$\therefore\quad \text{W. gl. dim}\Lambda \leqslant \text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda)+1.$

其次，因 Λ 是左凝聚环，故由引理 4.1.11 知 $\Lambda/\lambda\Lambda$ 也是左凝聚环. 于是

$$\text{W. gl. dim}\Lambda = \text{l. f. p. gl. dim}\Lambda,$$

$$\text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda) = \text{l. f. p. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda).$$

因此类似于(i)的证明，可推得

$$\text{W. gl. dim}\Lambda \geqslant \text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda)+1.$$

$\therefore\quad \text{W. gl. dim}\Lambda = \text{W. gl. dim}(\Lambda/\lambda\Lambda)+1.$

在定理 4.1.13(ii)中，如果 Λ 是左 Noether 环，就得定理 2.3.4.

4.2 凝聚拟局部环上的模

本节将研究凝聚拟局部环及其模的同调维数，主要是推广 3.3 节中 Noether 拟局部环上 f.g. 模的一些结果. 在这一节里，Λ 表示拟局部环，J 为它的 Jacobson 根，于是 Λ/J 是除环，且 J 为 Λ 的唯一极大理想.

定理 4.2.1 设 Λ 是左凝聚拟局部环，A 是 f.p. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是投射模；

(ii) A 是平坦模；

(iii) $\text{Ext}^1_\Lambda(A, \Lambda/J)=0$；

(iv) $\text{Tor}^\Lambda_1(\Lambda/J, A)=0$.

证明 (i)⇔(ii) 由命题 2.5.4 直接推得.

(iii)⇔(iv) 因 Λ 是左凝聚环，A 是 f.p. 左 Λ-模，故由推论 4.1.2 知 A 具有有限自由分解. 于是得

$$\text{Tor}^\Lambda_1(\text{Hom}_Z(\Lambda/J, Q/Z), A) \cong \text{Hom}_Z(\text{Ext}^1_\Lambda(A, \Lambda/J), Q/Z),$$

其中 Q 是有理数环，Z 是整数环. 再仿照定理 3.3.2 的证明，便知结论是成立的.

(i)⇒(iii) 由定理 2.1.1 知结论成立.

(iii)⇒(i) 仿照定理 3.3.2 的证明，便知结论是成立的.

在定理 4.2.1 中，如果 Λ 是左 Noether 环，A 是 f.g. 左 Λ-模，就得到定理 3.3.2.

同样，与定理 3.3.3 的证明类似，又可得到：

定理 4.2.2 设 Λ 是左凝聚拟局部环，A 是 f.p. 左 Λ-模，$n(\geqslant -1)$是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{pd}A\leqslant n$;

(ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$;

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$.

推论 4.2.3 设 Λ 是交换凝聚环，A 是 f.p. Λ-模，则 $\mathrm{pd}A\leqslant n\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/m,A)=0,\forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$.

证明 由定理 4.1.7 得

$$\mathrm{pd}A=\mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}A_m\mid\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

又由命题 4.1.5 知局部环 Λ_m 也是凝聚环. 于是根据定理 4.2.2 得

$$\mathrm{pd}_{\Lambda_m}A_m\leqslant n\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m,A_m)=0.$$

但是

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m,A_m)=[\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m,A)]_m,$$

$$\therefore\quad \mathrm{pd}A\leqslant n\Leftrightarrow\mathrm{pd}_{\Lambda_m}A_m\leqslant n,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$$
$$\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m,A)=0,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda).$$

定理 4.2.4 设 Λ 是左凝聚拟局部环，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)$.

证明 仅需假定 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=n<\infty$. 由定理 2.3.2 得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{\mathrm{l.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\mid I\text{ 是 }\Lambda\text{ 的任意 f.g. 左理想}\}.$$

因 Λ 是左凝聚环，Λ/I 是 f.p. 左 Λ-模，故根据推论 4.1.2 知必有 Λ-模的正合列

$$0\to K_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to\Lambda/I\to 0,\tag{1}$$

其中每个 F_i 是 f.g. 左 Λ-自由模，K_n 是 f.p. 左 Λ-模.

$$\therefore\quad \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,K_n)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,\Lambda/I).$$

因 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=n$，故得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,K_n)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,\Lambda/I)=0.$$

又由定理 4.2.1 知 K_n 是投射左 Λ-模，因此由(1)可得

$$\text{l.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant n,\ \forall\ \text{f.g.左理想}\ I.$$

$\therefore\quad \text{W.gl.dim}\Lambda=\text{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J).$

下面，我们讨论交换环的情形.

引理 4.2.5 设 Λ 是交换环，S 是 Λ 的元素的乘法闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$. 若 A 是 Λ-模，则

(i) $\text{fd}_{\Lambda_S}(A_S)\leqslant \text{fd}_\Lambda A$；

(ii) $\text{fd}_\Lambda A=\text{Sup}\{\text{fd}_{\Lambda_m}A_m\mid \forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$.

证明 (i) 若 $\text{fd}_\Lambda A=\infty$，则结论成立是显然的. 若 $\text{fd}_\Lambda A=n<\infty$，令 B 是任意 Λ_S-模，对任意 $\lambda\in\Lambda$，$b\in B$，定义 $\lambda b=\left[\dfrac{\lambda}{1}\right]b$，则 B 是 Λ-模，且 $B_S\cong B$. 于是得

$$\text{Tor}^{\Lambda_S}_{n+1}(A_S,B)\cong\text{Tor}^{\Lambda_S}_{n+1}(A_S,B_S)\cong[\text{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(A,B)]_S.$$

因 $\text{fd}_\Lambda A=n$，故 $\text{Tor}^\Lambda_{n+1}(A,B)=0$. 因而 $\text{Tor}^{\Lambda_S}_{n+1}(A_S,B)=0$. 所以 $\text{fd}_{\Lambda_S}A_S\leqslant n=\text{fd}_\Lambda A$.

(ii) 首先，由(i)得

$$\text{Sup}\{\text{fd}_{\Lambda_m}A_m\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}\leqslant\text{fd}_\Lambda A.$$

假定 $\text{Sup}\{\text{fd}_{\Lambda_m}A_m\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}=n$，$B$ 是任意 Λ-模，于是

$$0=\text{Tor}^{\Lambda_m}_{n+1}(A_m,B_m)\cong[\text{Tor}^\Lambda_{n+1}(A,B)]_m,\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda).$$

因此 $\text{Tor}^\Lambda_{n+1}(A,B)=0$. 故 $\text{fd}_\Lambda A\leqslant n$.

$\therefore\quad \text{fd}_\Lambda A=\text{Sup}\{\text{fd}_{\Lambda_m}A_m\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$.

引理 4.2.6 设 Λ 是交换环，S 是 Λ 的元素的乘法闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$，则

(i) $\text{W.gl.dim}\Lambda_S\leqslant\text{W.gl.dim}\Lambda$；

(ii) $\text{W.gl.dim}\Lambda=\text{Sup}\{\text{W.gl.dim}\Lambda_m\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$.

证明 (i) 设 A 是任意 Λ_S-模，由引理 4.2.5(i)的证明知，A 也可构成 Λ-模，并且有

$$\text{fd}_{\Lambda_S}A\leqslant\text{fd}_\Lambda A.$$

$\therefore\quad \text{W.gl.dim}\Lambda_S\leqslant\text{W.gl.dim}\Lambda.$

(ii) 由(i)得

$$\mathrm{Sup}\{\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\} \leqslant \mathrm{W.gl.dim}\Lambda.$$

另外，若 A 是任意 Λ-模，则由引理 4.2.5(ii)得

$$\mathrm{fd}_\Lambda A = \mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}_{\Lambda_m}(A_m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

$\therefore\quad \mathrm{fd}_\Lambda A \leqslant \mathrm{Sup}\{\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$

综合以上讨论得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

定理 4.2.7 设 Λ 是交换凝聚环，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

证明 首先，根据引理 4.2.6 得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

因 Λ 是凝聚环，故局部环 Λ_m 是凝聚的. 于是由定理 4.2.4(ii)得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m = \mathrm{fd}_{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m).$$

因此又由引理 4.2.5(ii)就有

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

推论 4.2.8 设 Λ 是交换环，若对任意 $m \in \mathrm{Max}(\Lambda)$，$\Lambda_m$ 皆是凝聚环，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m) \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

证明 仿照定理 4.2.7 的证明可直接推得.

现在，应用上面的结果，给出计算交换凝聚局部环的 f. f. p. dim 维数一个法则.

命题 4.2.9 设 Λ 是交换凝聚局部环，若 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J) < \infty$，则

$$\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda = \mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 因 Λ 是交换凝聚局部环，故由定理 4.2.4 知 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)$. 因 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J) < \infty$，故根据命题 2.5.8 得

$$\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda = \mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

定理 4.2.10 设 Λ 是交换凝聚局部环，J 是 f. g. 的，且 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J) < \infty$，则

$$\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda = \mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 因 Λ/J 是 f. p. 的，且 Λ 是凝聚环，故 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)$. 又由命题 4.2.9 得

$$\text{f. f. p. dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

4.3 凝聚局部环的余维数

在 3.4 节中，我们定义了模的余维数的概念，并且证明了关于有限整体维数的交换 Noether 局部环的 Auslander-Buchsbaum 定理．本节，我们将研究凝聚局部环上 f. p. 模的余维数，推广 Auslander-Buchsbaum 定理.

在这节里，所指的环 Λ 都是交换环，J 代表环 Λ 的 Jacobson 根.

定义 设 A 是 Λ-模，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in J$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个 A-序列，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个正规 A-序列.

定义 设 A 是 Λ-模，如果存在一个正规 A-序列，它共有 n 项，且任意正规 A-序列的项数都不超过 n，则称 A 的余维数为 n，记作 $\mathrm{Codh}_\Lambda A=n$.

命题 4.3.1 设 Λ 是交换凝聚局部环，A 是 f. p. Λ-模. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正规 A-序列，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]=\mathrm{pd}_\Lambda A+n.$$

证明 与定理 3.4.1 的证明相类似，证明中仅需应用定理 4.2.2 就可以了，在此不再详细推导.

命题 4.3.2 设 Λ 是交换凝聚局部环，A 是 f. p. Λ-模，若 W. gl. dim$\Lambda<\infty$，则任意正规 A-序列的长度有限，且不超过W. gl. dimΛ.

证明 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个正规 A-序列，由命题 4.3.1 得

$$\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]=\mathrm{pd}_\Lambda A+n.$$

因 A 是 f. p. 的，故 $A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 也是 f. p. Λ-模，且 Λ 是凝聚环. 于是得

$$\begin{aligned}\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]&=\mathrm{fd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]\\&\leqslant \text{W. gl. dim}\Lambda.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{pd}_\Lambda A+n\leqslant$ W. gl. dimΛ. 所以每个正规 A-序列的长度有限，且不

超过 W. gl. dimΛ.

定义 设 B 是 Λ-模 A 的子模，且 $B\neq A$. 如果对 $\lambda\in\Lambda$, $a\in A$，当 $\lambda a\in B$ 时，必有 $a\in B$ 或 $\lambda^n A\subseteq B$，这里 n 是某个正整数，则称 B 为 Λ-模 A 的准素子模.

设 B 是 Λ-模 A 的准素子模，令 $P=\{\lambda\in\Lambda \mid \lambda^n A\subseteq B$，$n$ 是某个正整数$\}$，则 P 是环 Λ 的一个素理想，记 $P=r(B)$，并称 B 为 P-准素子模，而 P 称为相伴于 B 的素理想.

定义 设 B 是 Λ-模 A 的子模，$N_i(i=1,2,\cdots,q)$是 A 的准素子模. 若

$$B=\bigcap_{i=1}^{q} N_i, \tag{1}$$

并且适合以下条件：

(i) $r(N_1), r(N_2), \cdots, r(N_q)$是互不相同的；

(ii) 对任何一个正整数 $t(1\leqslant t\leqslant q)$，皆有

$$B\neq N_1\cap\cdots\cap N_{t-1}\cap N_{t+1}\cap\cdots\cap N_q,$$

则称(1)式为 B 在 A 内的标准准素分解，把 $r(N_i)$叫做属于 B 的素理想.

命题 4.3.3* 设 A 是交换环 Λ 上的 Noether 模，则它的每个子模在 A 内有标准准素分解(文献[123]定理 2.3 的推论).

设 A 是 Λ-模，记 $\mathrm{Ann}_\Lambda A=\{\lambda\in\Lambda \mid \lambda A=0\}$，则 $\mathrm{Ann}_\Lambda A$ 是 Λ 的一个理想，把它叫做模 A 的零化子. 易知模 A 的子模 B 是准素子模$\Leftrightarrow B\neq A$，且对任意 $\lambda\in\Lambda$, $a\in A$，当 $\lambda a\in B$ 时必有 $a\in B$ 或者

$$\lambda\in \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_\Lambda(A/B)).$$

引理 4.3.4 设 Λ 是交换环，A 是 NoetherΛ-模，B 是 A 的子模，I 是 Λ 的 f.g. 理想，则下列陈述是等价的：

(i) I 不包含在任何属于 B 的素理想中；

(ii) 存在 $\alpha\in I$，使得 $B:{}_A\alpha=B$；

(iii) $B:{}_A I=B$.

证明 因 A 是 Noether 模，由命题 4.3.3* 知，B 在 A 内有标准准素分解. 设 $B=\bigcap_{i=1}^{q} N_i$ 是 B 在 A 内的标准准素分解，N_i 是 P_i-准素子模.

(i)⇒(ii)　因 $I\not\subseteq P_i, i=1,2,\cdots,q$，故存在 $\alpha\in I$，使得 $\alpha\notin P_i, i=1,2,\cdots,q$. 从而又有 $N_i :_A \alpha = N_i$.

$$\therefore\quad B :_A \alpha = (\bigcap_{i=1}^{q} N_i) :_A \alpha$$
$$= \bigcap_{i=1}^{q}(N_i :_A \alpha) = \bigcap_{i=1}^{q} N_i = B.$$

(ii)⇒(iii)　由(ii)知 $B :_A I\subseteq B$，故(iii)成立是显然的.

(iii)⇒(i)　因 $B :_A I = B$，故得

$$B = (B :_A I) :_A I = B :_A I^2.$$

这样继续下去，对任意正整数 n，必有 $B = B :_A I^n$. 不失一般性，不妨假设 $I\not\subseteq P_1$，$I\not\subseteq P_2,\cdots I\not\subseteq P_s$，但 $I\subseteq P_{s+1},\cdots,I\subseteq P_q$，我们证明 $s=q$. 如果 $s+1\leqslant j\leqslant q$，就有 $I\subseteq \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_A(A/N_j))$. 因 I 是 f. g. 的，故必有正整数 m，使得 $I^m A\subseteq N_j$，这里 $s+1\leqslant j\leqslant q$，即 $N_j :_A I^m = A$，$s+1\leqslant j\leqslant q$. 又因 $I\not\subseteq P_h$，且 P_h 是素理想，故 $I^m\not\subseteq P_h$，这里 $1\leqslant h\leqslant s$. 从而对 $1\leqslant h\leqslant s$，必存在 $\alpha_h\in I^m$，使得 $\alpha_h\notin P_h$.

$$\therefore\quad N_h\subseteq N_h :_A I^m\subseteq N_h :_A \alpha_h = N_h.$$

因此 $N_h :_A I^m = N_h, 1\leqslant h\leqslant s$.

$$\therefore\quad B :_A I^m = (N_1 :_A I^m)\cap\cdots\cap(N_s :_A I^m)\cap(N_{s+1} :_A I^m)\cdots$$
$$\cap(N_q :_A I^m)$$
$$= N_1\cap\cdots\cap N_s\cap A\cap\cdots\cap A$$
$$= N_1\cap\cdots\cap N_s.$$

但是已知 $B = B :_A I^m$，于是得

$$B = N_1\cap\cdots\cap N_s = N_1\cap\cdots\cap N_s\cap N_{s+1}\cap\cdots\cap N_q.$$

所以 $s=q$.

在下面的讨论中，所指的环 A 皆是交换凝聚局部环，用 m 表示它的唯一极大的理想.

引理 4.3.5　设 A 是 Noether$A$-模，且 m 是 f. g. 的. 若 A 的适合 $mB=0$ 的子模仅有零子模，则 m 必含有一个元素，它关于 A 是正则元.

证明　因 $0 :_A m = 0$，由引理 4.3.4 知，m 不包含在任何属于 A 的零子模 0 的素理想中. 于是存在 $\alpha\in m$，使得 α 不属于零子模 0 的任一素理想中. 因此 $0 :_A \alpha = 0$，即 α 关于 A 是正则元.

引理 4.3.6 设 A 是 f.p. NoetherΛ-模，且 m 是 f.g. 的．若 W.gl.dim$\Lambda<\infty$，则 $\mathrm{pd}_\Lambda A=$W.gl.dimΛ 的充分必要条件是存在 A 的非零子模 B，使得 $mB=0$.

证明 若存在 A 的非零子模 B，适合 $mB=0$，则不失一般性可假定 $B=(x)$. 定义 $\varphi: \Lambda\to B$ 使 $\lambda\mapsto\lambda x, \forall\ \lambda\in\Lambda$，则 φ 是 Λ-同态，$\mathrm{Ker}\varphi=m$. 因此 $B\cong\Lambda/m$. 于是有 Λ-模的正合列

$$0\to\Lambda/m\to A\to A/B\to 0. \quad (2)$$

令 W.gl.dim$\Lambda=n<\infty$，由(2)又得正合列

$$0\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,\Lambda/m)\to\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,A). \quad (3)$$

因 Λ 是交换凝聚局部环，故根据定理 4.2.4 得 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m)=$ W.gl.dim$\Lambda=n$. 于是又由定理 4.2.2 知 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,\Lambda/m)\neq 0$. 因而 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,A)\neq 0$. 再应用定理 4.2.2 得

$$\mathrm{pd}_\Lambda A=n=\text{W.gl.dim}\Lambda.$$

反过来，假定 $\mathrm{pd}_\Lambda A=$W.gl.dimΛ. 如果仅有 A 的零子模适合 $mB=0$，由引理 4.3.5 知，存在 $\alpha\in m$，α 关于 A 是正则元．又根据命题 4.3.1 得

$$\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)=\mathrm{pd}_\Lambda A+1=\text{W.gl.dim}\Lambda+1.$$

但是 $A/\alpha A$ 是 f.p. Λ-模，且 Λ 是凝聚环，故 $\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)=\mathrm{fd}_\Lambda(A/\alpha A)$. 于是

$$\mathrm{pd}_\Lambda(A/\alpha A)\leqslant\text{W.gl.dim}\Lambda.$$

这就导出矛盾，故必存在 A 的非零子模 B，使得 $mB=0$.

定理 4.3.7 设 Λ 是交换凝聚局部环，W.gl.dim$\Lambda<\infty$，且 m 是 f.g. 的，若 A 是 f.p. Noether Λ-模，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A+\mathrm{Codh}_\Lambda A=\text{W.gl.dim}\Lambda.$$

证明 首先，由命题 4.3.2 得

$$\mathrm{Codh}_\Lambda A\leqslant\text{W.gl.dim}\Lambda<\infty.$$

现在令 $\mathrm{Codh}_\Lambda A=n$，则存在正规 A-序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，并应用命题 4.3.1 得

$$\mathrm{Codh}_\Lambda A+\mathrm{pd}_\Lambda A=n+\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A].$$

因此下面仅需证明 $\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]=$W.gl.dim$\Lambda$. 因而由引

理 4.3.6，只需证明 m 零化 $A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 的某个非零子模. 反之，因 A 是 Noether 模，故 $A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 也是 Noether 模. 由引理 4.3.5 知，存在 $\alpha_{n+1}\in m$，它关于 $A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 是正则元. 因而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$是正规 A-序列. 这与 $\mathrm{Codh}_\Lambda A=n$ 相矛盾.

$\therefore\quad \mathrm{pd}_\Lambda A+\mathrm{Codh}_\Lambda A=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda.$

显然定理 3.4.8(Auslander-Buchsbaum)是定理 4.3.7 的特殊情况.

4.4 凝聚 GCD 整环的同调特征

在 3.5 节中，我们证明正则局部环(即有限整体维数的交换 Noether 局部环)是唯一的分解整环，因而是整环. 本节将推广这个结果，首先讨论凝聚局部环、不可分凝聚环是整环的同调特征，然后进一步研究凝聚局部环、不可分凝聚环是最大公因子整环(GCD)的同调特征.

本节所指的环 Λ 皆是交换环. 若 Λ 是局部环，则用 m 表示它的唯一极大理想.

定义 设 A 是 Λ-模，令

$$\mathrm{Ass}_\Lambda(A)=\{P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)\mid \text{存在某个 } 0\neq x\in A, P \text{ 是包含}(0:{}_\Lambda x)\text{的极小素理想}\},$$

则把 $\mathrm{Ass}_\Lambda(A)$称为模 A 的相伴素理想集，把 P 叫做$(0:{}_\Lambda x)$上的极小素理想.

以后，把$(0:{}_\Lambda x)$简记为$(0:x)$. 显然，$(0:x)=\mathrm{Ann}_\Lambda(x)$.

命题 4.4.1 设 A 是 Λ-模，$0\neq x\in A$，P 是$(0:x)$上的极小素理想. 若 I 是 Λ 的 f.g. 理想，且 $I\subseteq P$，则存在非负整数 n 和元素 $\lambda\in\Lambda-P$，使得 $\lambda I^n x=0$.

证明 因 P 是$(0:x)$上极小素理想，故 $P(\Lambda/(0:x))_P$ 是分式环$(\Lambda/(0:x))_P$ 的唯一素理想. 因此 $P(\Lambda/(0:x))_P$ 中每个元素都是幂零的. 而 $I\subseteq P$，故 $I(\Lambda/(0:x))_P$ 中每个元素也是幂零元，且 I 是 f.g. 的. 因而必存在非负整数 n 和元素 $\lambda\in\Lambda-P$，使得 $\lambda I^n x=0$.

推论 4.4.2 设 A 是 Λ-模，I 是 Λ 的 f.g. 理想．若 $I\subseteq P$，对某个 $P\in \mathrm{Ass}_{\Lambda}(A)$，则存在 $0\neq a\in A$，使得 $Ia=0$.

证明 设 $I=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，且 $I\subset P$，P 是 $(0:x)$ 上极小素理想，其中 x 是 A 中某个元素．由命题 4.4.1 知，存在非负整数 n 和元素 $\lambda\in\Lambda-P$，使得 $\lambda I^n x=0$. 因 $\lambda\notin P$ 且 $(0:x)\subseteq P$，故 $\lambda\notin(0:x)$，即 $\lambda x\neq 0$. 于是有 m_1 使 $\lambda\alpha_1^{m_1}x\neq 0$，而 $\lambda\alpha_1^{m_1+1}x=0$，记 $x_1=\lambda\alpha_1^{m_1}x$. 同理，有 m_2 使 $\alpha_2^{m_2}x_1\neq 0$，而 $\alpha_2^{m_2-1}x_1=0$，记 $x_2=\alpha_2^{m_2}x_1$. 一般地，有 $x_i=\alpha_i^{m_i}x_{i-1}\neq 0$，而 $\alpha_i^{m_i+1}x_{i-1}=0$. 因此存在 $0\neq x_n\in A$，使得 $\alpha_i x_n=0, i=1,2,\cdots,n$. 取 $a=x_n$，则 $Ia=0$.

定义 设 Λ 是交换环，若对 Λ 的任意 f.g. 理想 I，皆有 $(0:I)\neq 0$，则称 Λ 为具有性质(P)的环，也称为 0-环.

我们把 $(0:I)$ 叫做 I 的零化子．因此，一个具有性质(P)的环 Λ，即指 Λ 的每个 f.g. 理想皆有非零零化子.

例 设 Λ 是交换局部环，m 是它的唯一极大理想，若 $m\in \mathrm{Ass}(\Lambda)$，则 Λ 具有性质(P).

事实上，假定 I 是 Λ 的任意 f.g. 理想，则 $I\subseteq m$. 由推论 4.4.2 知，$\exists\ 0\neq\lambda\in\Lambda$，使得 $\lambda I=0$. 故 $(0:I)\neq 0$，即 Λ 具有性质(P).

引理 4.4.3 设 Λ 是局部环，F 是 f.g. 自由模. 若 Λ 具有性质(P)，则

$$mF=\{x\in F \mid \exists\ 0\neq\alpha\in\Lambda \text{ 使 } \alpha x=0\}.$$

证明 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 F 的基，对任意 $x\in F$，则

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i, \lambda_i\in\Lambda(i=1,2,\cdots,n).$$

若 $x\in mF$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in m$. 令 $I=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，因 Λ 具有性质(P)，于是 $\exists\ 0\neq\alpha\in\Lambda$，使得 $\alpha I=0$. 故 $\alpha\lambda_i=0, i=1,2,\cdots,n$. 从而 $\alpha x=0$.

若 $x\in F-mF$，则 x 的表示式中必有某个 $\lambda_i\notin m$. 假定有 $\alpha\in\Lambda$ 适合 $\alpha x-0$，于是

$$\alpha\lambda_1 e_1+\cdots+\alpha\lambda_i e_i+\cdots+\alpha\lambda_n e_n=0.$$

但 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 F 的基，因而

$$\alpha\lambda_1=\cdots=\alpha\lambda_i=\cdots=\alpha\lambda_n=0,$$

且 $\lambda_i\notin m$. 又由于 λ_i 有逆元素 λ_i^{-1}，因此由 $\alpha\lambda_i=0$ 得 $\alpha=0$.

综合以上讨论得

$$mF=\{x\in F\mid \exists\ 0\neq\alpha\in\Lambda\text{ 使 }\alpha x=0\}.$$

定理 4.4.4 局部环 Λ 具有性质(P)$\Leftrightarrow$对于任意 f.g. 自由 Λ-模 F 和 F 的子模 K，且 K 是 f.g. 自由模时，F/K 也是自由 Λ-模.

证明 若 Λ 具有性质(P)，由引理 4.4.3，得 $mK=mF\cap K$. 因 $K/mK\cong K\otimes_\Lambda(\Lambda/m)$，$F/mF\cong F\otimes_\Lambda(\Lambda/m)$，并记包含映射 $f: K\to F$，故得 Λ-同态

$$f\otimes 1_{\Lambda/m}: K\otimes_\Lambda(\Lambda/m)\to F\otimes_\Lambda(\Lambda/m).$$

从而必有交换图

$$\begin{array}{ccc}
K/mK & \xrightarrow{\bar f} & F/mF\\
\downarrow & & \downarrow\\
K\otimes_\Lambda(\Lambda/m) & \xrightarrow{f\otimes 1_{\Lambda/m}} & F\otimes_\Lambda(\Lambda/m)
\end{array}$$

其中两个垂直映射是同构，$\bar f(x+mK)=x+mF$，$\forall\ x\in K$. 若 $x\in K$ 且 $x+mF=0$，则 $x\in K\cap mF=mK$. 故 $x+mK=0$. 因此 $\bar f$ 是单同态. 而知 $f\otimes\mathbf{1}_{\Lambda/m}$也是单同态. 以 F/K 是自由模.

反过来，设 $I=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$是 Λ 的任意 f.g. 理想，要证$(0:I)\neq 0$. 对任意 $x\in\Lambda$，定义 $f:\Lambda\to\Lambda^{(n)}$使 $x\mapsto(\lambda_1x,\lambda_2x,\cdots,\lambda_nx)$，则 f 是 Λ-同态，且 $\operatorname{Ker}f=(0:I)$. 若 $\operatorname{Ker}f=0$，因 $\Lambda^{(n)}$和${}_\Lambda\Lambda$ 都是f.g. 自由模且${}_\Lambda\Lambda$ 是 $\Lambda^{(n)}$的子模，则由题设知 $\operatorname{Coker}f=\Lambda^{(n)}/\Lambda$ 也是自由 Λ-模. 故 $f\otimes 1_{\Lambda/m}: \Lambda\otimes_\Lambda(\Lambda/m)\to\Lambda^{(n)}\otimes_\Lambda(\Lambda/m)$是单同态. 考虑下面交换图

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda/m\Lambda & \xrightarrow{\bar f} & \Lambda^{(n)}/m\Lambda^{(n)}\\
\downarrow & & \downarrow\\
\Lambda\otimes_\Lambda(\Lambda/m) & \xrightarrow{f\otimes 1_{\Lambda/m}} & \Lambda^{(n)}\otimes_\Lambda(\Lambda/m)
\end{array}$$

其中两个垂直映射是同构，$\bar f(x+m\Lambda)=(\lambda_1x,\lambda_2x,\cdots,\lambda_nx)+m\Lambda^{(n)}$，$\forall\ x\in\Lambda$. 又因 $I\subseteq m$，故$(\lambda_1x,\lambda_2x,\cdots,\lambda_nx)\in m\Lambda^{(n)}$. 于是知 $\bar f=0$. 从而

$f\otimes 1_{\Lambda/m}=0$. 这与 $f\otimes 1_{\Lambda/m}$是单同态相矛盾，所以 $\mathrm{Ker}f=(0:I)\neq 0$，即 Λ 具有性质(P).

定义 设 A 是 Λ-模，若存在 Λ-模的正合列

$$0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，则称模 A 具有 FFR 分解.

推论 4.4.5 设局部环 Λ 具有性质(P)，则每个具有 FFR 分解的 Λ-模都是自由模.

证明 设 A 是 Λ-模，它具有 FFR 分解

$$0\longrightarrow F_n\xrightarrow{d_n}F_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}F_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0,$$

因而得 Λ-模的短正合列

$$\begin{aligned}&0\to F_n\to F_{n-1}\to \mathrm{Im}d_{n-1}\to 0,\\&0\to \mathrm{Im}d_{n-1}\to F_{n-2}\to \mathrm{Im}d_{n-2}\to 0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&0\to \mathrm{Im}d_1\to F_0\to A\to 0.\end{aligned}\tag{1}$$

因 Λ 具有性质(P)，故由定理 4.4.4 知 $\mathrm{Im}d_{n-1}$是自由模. 从而又知 $\mathrm{Im}d_{n-2}$是自由模. 这样继续下去，最后便知 A 是自由模.

推论 4.4.6 设 Λ 是交换凝聚局部环，且 Λ 具有性质(P). 若 A 是 f.p. Λ-模，$\mathrm{fd}A<\infty$，则 A 是自由模.

证明 因 Λ 是凝聚局部环，故由推论 4.1.2 得 Λ-模的正合列

$$0\to K_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，K_n 是 f.p. 的. 不妨设 $\mathrm{fd}A=n$，因而 $\mathrm{pd}_\Lambda A=n$. 又由定理 2.1.1 知 K_n 是投射模，故 K_n 也是 f.g. 自由模. 于是再由推论 4.4.5 便知 A 是自由模.

推论 4.4.7 设 Λ 是交换凝聚局部环，且 Λ 具有性质(P)，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\infty\text{，或 }0.$$

定义 设 A 是 f.g. Λ-模，且 A 具有 FFR 分解

$$0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，记

$$\chi_\Lambda(A)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathrm{rank}F_i,$$

并把它叫做模 A 的 Euler 特征．为方便起见，有时把 $\chi_\Lambda(A)$简记为 $\chi(A)$.

由 Schanuel 引理知，$\chi(A)$与 A 的 FFR 分解的选取法无关.

命题 4.4.8 设 S 是交换环 Λ 的乘法封闭集，$1\in S$ 且 $0\notin S$. 若 A 是 f.g. Λ-模且具有 FFR 分解，则 $\chi_{\Lambda_s}(A_s)=\chi(A)$.

证明 因$(-)_s$ 是正合函子，并且若 F 是 f.g. 自由模，则 F_s 是 f.g. 自由 Λ_s-模，故由定义得 $\chi_{\Lambda_s}(A_s)=\chi(A)$.

定理 4.4.9 设 A 是 f.g. Λ-模，若 A 具有 FFR 分解，则

(i) $\chi(A)\geqslant 0$;

(ii) $\chi(A)=0\Leftrightarrow(0:A)\neq 0$.

证明 (i) 设 $P\in \mathrm{Ass}(\Lambda)$，则 Λ_P 是具有性质(P)的局部环. 因 A 具有 FFR 分解，故 A_P 也具有 FFR 分解. 因此由推论 4.4.5 知，A_P 是自由 Λ_p-模. 最后应用命题 4.4.8，得

$$\chi(A)=\chi_{\Lambda_P}(A_P)\geqslant 0.$$

(ii)若 $\chi(A)=0$，设 $P\in\mathrm{Ass}(\Lambda)$，由(i)的证明知 A_P 是自由 Λ_P-模. 因 $\chi_{\Lambda_P}(A_P)=\chi(A)=0$，且 A_P 是自由 Λ_P-模，故 $A_P=0$. 由于 A 是 f.g. 的，因此必存在 $s\in\Lambda-P$，使得 $sA=0$. 所以$(0:A)\neq 0$.

反过来，若$(0:A)\neq 0$，设 $0\neq x\in(0:A)$，P 是$(0:x)$上极小素理想，则 $P\in\mathrm{Ass}(\Lambda)$. 故 Λ_P 是具有性质(P)的局部环．又知 A_P 具有 FFR 分解，应用推论 4.4.5 得，A_P 是自由 Λ_P-模. 但 $0\neq\frac{x}{1}\in\Lambda_P$，且 $\frac{x}{1}A_P=0$，又 A_P 是自由 Λ_P-模，故 $A_P=0$.

$\therefore\quad \chi(A)=\chi_{\Lambda_P}(A_P)=0.$

推论 4.4.10 设 I 是 Λ 的 f.g. 理想，若 I 具有 FFR 分解，则 $(0:I)=0$.

证明 若$(0:I)\neq 0$，则由定理 4.4.9 知 $\chi(I)=0$. 因 $I\subseteq(0:(0:I))$，故$(0:(0:I))\neq 0$. 令 $0\neq x\in(0:(0:I))$，P 是$(0:x)$上极小素理想，则 $P\in\mathrm{Ass}(\Lambda)$. 根据推论 4.4.5 知 I_P 是自由 Λ_P-模. 因此 $I_P=0$ 或$(0:_{\Lambda_P}I_P)=0$. 若 $I_P=0$，因 I 为 f.g. 的，则必存在 s

$\in \Lambda-P$，使得 $sI=0$，即 $s\in(0:I)$ 且 $s\notin P$. 但是，$s\in(0:I)\subseteq(0:x)\subseteq P$，这就导出矛盾．若 $(0:_{\Lambda_P}I_P)=0$，则又有 $\chi(I)=\chi_{\Lambda_P}(I_P)\neq 0$. 仍然导出矛盾，所以 $(0:I)=0$.

定理 4.4.11 设 Λ 是凝聚局部环，且它的每个主理想具有有限投射维数，则 Λ 是整环.

证明 设 $I=(\lambda)$ 是 Λ 的一个非零主理想，令 $\mathrm{pd}I=n<\infty$，因 Λ 是凝聚局部环，故必有 Λ-模的正合列

$$0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to I\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，即 I 具有 FFR 分解. 又由推论 4.4.10 得 $(0:\lambda)=(0:I)=0$. 故 Λ 是整环.

推论 4.4.12 设 Λ 是凝聚环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，则 Λ_P 是整环，$\forall P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$.

证明 由引理 4.2.6(i)得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_P\leqslant \mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty,\forall P\in\mathrm{Spec}(\Lambda).$$

又因 Λ_P 是凝聚局部环，并且 $\mathrm{pd}_{\Lambda_P}(x)=\mathrm{fd}_{\Lambda_P}(x)<\infty$，$\forall x\in\Lambda_P$，故由定理 4.4.11 知 Λ_P 是整环.

我们知道，若交换环 Λ 中不含有除 0,1 以外的幂等元，就称环 Λ 为不可分的. 显然，局部环是不可分的环. 下面首先推广定理 4.4.11.

定理 4.4.13 设 Λ 是不可分凝聚环，且它的每个主理想具有有限投射维数，则 Λ 是整环.

证明 对任意 $0\neq\lambda\in\Lambda$，得 Λ-模正合列

$$0\to\mathrm{Ann}(\lambda)\to\Lambda\to\lambda\Lambda\to 0. \tag{2}$$

设 m 是 Λ 的任意极大理想，因 Λ_m 是凝聚局部环，且它的每个主理想的投射维数也是有限的，故由定理 4.4.11 知 Λ_m 是整环．因此 $\lambda\Lambda_m$ 为 0 或者是自由 Λ_m-模．所以 $\lambda\Lambda$ 是投射 Λ-模. 因此正合列(2)是分裂的. 于是得

$$\Lambda\cong\mathrm{Ann}(\lambda)\oplus\lambda\Lambda.$$

但 Λ 是不可分且 $\lambda\neq 0$，因此 $\mathrm{Ann}(\lambda)=0$. 故 Λ 是整环.

推论 4.4.14 不可分遗传(半遗传)环是 Dedekind(Prüfer)整环.

最后，我们讨论不可分环是 GCD 整环的问题．

定义 设 Λ 是整环，若对任意两个元素 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 都有最大公因子 $[\alpha,\beta]$，则称 Λ 为最大公因子整环，或简称为 GCD 整环.

定义 设 Λ 是交换环，若每个 f. g. 投射理想是主理想，则称 Λ 为 PPC 环.

命题 4.4.15* 设 Λ 是凝聚整环，I 是具有有限投射维数的 f. g. 理想，则 $I=d(\Lambda/I)J$，这里 $d(\Lambda/I)$ 是可逆理想，J 是 Λ 的理想且 $J^{-1}=\Lambda$(文献[85]推论 5.20).

定理 4.4.16 设 Λ 是不可分凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 GCD 整环；

(ii) Λ_m 是 GCD 整环，$\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，并且 Λ 是 PPC 的；

(iii) Λ 中任意两个元素生成的理想具有有限投射维数，且 Λ 是 PPC 的.

证明 (i)⇒(ii) 设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，令 $\frac{\alpha}{1},\frac{\beta}{1}\in\Lambda_m$，记 $\gamma=[\alpha,\beta]$. 若 $\frac{d}{1}$ 是 $\frac{\alpha}{1}$ 和 $\frac{\beta}{1}$ 在 Λ_m 的公因子，则必有 $s,t\in\Lambda-m$，使得 $d\mid s\alpha$ 和 $d\mid t\beta$. 因此 d 是 $s\alpha$ 和 $t\beta$ 在 Λ 内的公因子. 因 $str=[st\alpha,st\beta,]$，故 $d\mid st\gamma$. 但 $st\notin m$，因此 $\frac{d}{1}\Big|\frac{\gamma}{1}$，即 $\frac{\gamma}{1}=\left[\frac{\alpha}{1},\frac{\beta}{1}\right]$. 又因 Λ 是整环，故易知 Λ_m 也是整环. 所以 Λ_m 是 GCD 整环.

最后，令 I 是 Λ 的 f. g. 投射理想，则 I 是可逆理想，即 $II^{-1}=\Lambda$. 于是 $I^{-1}=\frac{1}{\lambda}\Lambda$. 所以 $I=\lambda\Lambda$. 因此 Λ 是 PPC 的.

(ii)⇒(iii) 设 $\alpha,\beta\in\Lambda$，于是得 Λ-模的正合列

$$0\to(\alpha)\cap(\beta)\to\Lambda^2\to(\alpha,\beta)\to 0. \tag{3}$$

设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，因 Λ_m 是 GCD 整环，故 $(\alpha)_m\cap(\beta)_m$ 是 Λ_m 的主理想. 从而 $(\alpha)_m\cap(\beta)_m$ 是 0 或自由 Λ_m-模. 于是 $(\alpha)\cap(\beta)$ 是 Λ 的平坦理想. 但 Λ 是凝聚环，$(\alpha)\cap(\beta)$ 是 f. p. 平坦理想，因此 $(\alpha)\cap(\beta)$ 是投射模. 所以由(3)知 $\mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)\leqslant 1$.

(iii)⇒(i) 首先，由定理 4.4.13 知 Λ 是整环. 其次，设 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 是非零、非单位元，记 $I=(\alpha,\beta)$. 因 I 的投射维数有限，故由命题 4.4.15 得 $I=d(\Lambda/I)J$. 因 $d(\Lambda/I)$ 是可逆理想，故 $d(\Lambda/I)$ 是 f. g. 投

射模，并由(iii)知它是主理想．令 $d(\Lambda/I)=(\mu)$，这里 μ 是 Λ 中某个元素，于是得 $I=(\mu)J$．显然，作为 Λ-模 $(\mu)^{-1}=(\mu^{-1})$．

$$\therefore\quad J=(\mu)^{-1}I=(\mu^{-1})I=(\mu^{-1})(\alpha,\beta)=(\mu^{-1}\alpha,\mu^{-1}\beta).$$

今记 $\lambda=\mu^{-1}\alpha,\gamma=\mu^{-1}\beta$，于是 $\alpha=\mu\lambda,\beta=\mu\gamma$．我们断定 $[\alpha,\beta]=\mu$，这只需证明 $[\lambda,\gamma]=1$．因 $J=(\lambda,\gamma)$，故 $(\lambda,\gamma)^{-1}=J^{-1}=\Lambda$．考虑 Λ-模的正合列

$$0\to K\to \Lambda^{(2)}\xrightarrow{f}(\lambda,\gamma)\to 0,$$

这里 $f(1,0)=\lambda,f(0,1)=-\gamma$．若 $(x,y)\in K$，则 $f(x,y)=\lambda x-\gamma y=0$．因此 $\lambda x=\gamma y$．故 $\frac{x}{\gamma}(\lambda,\gamma)\subseteq\Lambda$．于是得 $\frac{x}{\gamma}\in(\lambda,\gamma)^{-1}=\Lambda,x\in\Lambda\gamma$．从而存在 $t\in\Lambda$，使得 $x=t\gamma$，并且 $\gamma\lambda t=\gamma y$．但 Λ 是整环，$y=\lambda t$，于是得 $K\subseteq\Lambda(\gamma,\lambda)$．又因 $f(\gamma,\lambda)=\lambda\gamma-\gamma\lambda=0$，故 $(\gamma,\lambda)\in K$．于是得 $K=\Lambda(\gamma,\lambda)$．现在，若 $\lambda=s\lambda'$ 和 $\gamma=s\gamma'$，这里 $s\in\Lambda$，则由 $f(\gamma',\lambda')=\lambda\gamma'-\gamma\lambda'=s\lambda'\gamma'-s\gamma'\lambda'=0$，得 $(\gamma',\lambda')\in K=\Lambda(\gamma,\lambda)$．因此，存在 $s'\in\Lambda$，使得

$$(\gamma',\lambda')=s'(\gamma,\lambda)=s's(\gamma',\lambda').$$

再由于 Λ 是整环，$s's=1$，亦即 s 是可逆的，因此 $[\lambda,\gamma]=1$．所以 $[\alpha,\beta]=\mu$，Λ 是 GCD 整环．

定义　设 Λ 是交换环，若每个 f.g. 理想具有有限投射维数，则称 Λ 为正则的．

推论 4.4.17　Noether 正则局部环 Λ 是唯一分解整环．

证明　由定理 4.4.16 知 Λ 是 GCD 整环，于是 Λ 为 Noether GCD 整环，所以 Λ 是唯一分解整环．

推论 4.4.18　凝聚正则局部环是 GCD 整环．

推论 4.4.19　设 Λ 是凝聚局部环，则 Λ 是 GCD 整环当且仅当 Λ 内任意两个元素生成的理想具有有限投射维数．

证明　显然，由定理 4.4.16 知条件是必要的．反过来，根据定理 4.4.13 知 Λ 是局部整环．因此 Λ 的每个 f.g. 投射理想是主理想，即 Λ 是 PPC 的．又根据定理 4.4.16 知 Λ 是 GCD 整环．

推论 4.4.20　设 Λ 是不可分凝聚正则环，则 Λ 是 GCD 的当且仅当 Λ 是 PPC 的．

4.5 凝聚 FP-环的结构

定义 设 Λ 是交换环，若 Λ 上每个 f.g. 投射模是自由的，则称 Λ 为 FP-环．如 $Z[x]$，这里 Z 是整数环，x 是 Z 上未定元；Bézout 整环和局部环都是 FP-环.

本节将进一步推广局部环的结果．主要证明有限弱整体维数的交换凝聚 FP-环是 GCD 整环．在这节里所指的环仍是交换环.

引理 4.5.1 设 Λ 是凝聚 FP-环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，则 Λ 是整环.

证明 设 $0\neq\lambda\in\Lambda$．因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，故 $\mathrm{fd}(\lambda)=n<\infty$．因 Λ 是凝聚环，故 $\mathrm{fd}(\lambda)=\mathrm{pd}(\lambda)=n$．又由推论 4.1.2，得 Λ-模的正合列

$$0\to K_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to(\lambda)\to 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，K_n 是 f.g. 投射模．但 Λ 是 FP-环，K_n 是 f.g. 自由模，故(λ)具有 FFR 分解．再由推论 4.4.10 知$(0:\lambda)=0$．所以 Λ 是整环.

定理 4.5.2 设 Λ 是有限弱整体维数的凝聚 FP-环，则 Λ 是 GCD 整环.

证明 由引理 4.5.1 知 Λ 是整环．其次，设 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 是非零、非单位元，记 $I=(\alpha,\beta)$，则 Λ/I 是 f.p. Λ-模．而 Λ 是凝聚环，故 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/I)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/I)$．又由题设知 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$．因此$\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/I)<\infty$．于是 $\mathrm{pd}_\Lambda I<\infty$．又由命题 4.4.15 得 $I=d(\Lambda/I)J$，这里 $d(\Lambda/I)$是 Λ 的可逆理想．故 $d(\Lambda/I)$是 Λ 的 f.g. 投射理想．因 Λ 是 FP-环，故 $d(\Lambda/I)$为自由的．因而 $d(\Lambda/I)$是主理想，并记 $d(\Lambda/I)=(\mu)$，其中 μ 是 Λ 中某个元素．这样就有 $I=(\mu)J$.

$$\therefore\quad J=(\mu)^{-1}I=(\mu^{-1})I=(\mu^{-1})(\alpha,\beta)=(\mu^{-1}\alpha,\mu^{-1}\beta).$$

又记 $\lambda=\mu^{-1}\alpha,\gamma=\mu^{-1}\beta$，于是 $\alpha=\mu\lambda,\beta=\mu\gamma$．应用定理 4.4.16 中(iii)$\Rightarrow$(i)的类似证明方法，便知$[\alpha,\beta]=\mu$．故 Λ 是 GCD 整环.

推论 4.5.3 设 Λ 是有限整体维数的 Noether FP-环，则 Λ 是唯一分解整环.

证明 由定理 4.5.2 知 Λ 是 GCD 整环．又因 Λ 是 Noether 环，Λ 关于主理想满足升链条件，故 Λ 是唯一分解整环.

推论 4.5.4 设 Λ 是任意交换环，则 Λ 是主理想整环$\Leftrightarrow\Lambda$ 是 FP-环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$.

证明 若 Λ 是 FP-环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$，则由定理 4.5.2 和定理 2.3.13 知 Λ 是遗传整环，即 Λ 是 Dedekind 环．因而 Λ 为 Noether 的．所以 Λ 的每个理想为 f.g. 投射理想．从而是自由的．但 Λ 是整环，因此 Λ 的每个理想是主理想．从而 Λ 是 PID 整环.

反过来，设 P 是 f.g. 投射 Λ-模，则 P 是某个自由模 $\Lambda^{(n)}$的子模．因 Λ 是主理想整环，自由模 $\Lambda^{(n)}$的子模 P 也是自由的，故 Λ 是 FP-环．另外，若 A 是任意 Λ-模，则考虑 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是自由模．因 Λ 是主理想整环，故 F 的子模 K 也是自由模，$\mathrm{pd}_\Lambda K=0$. 因此 $\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant 1$. 所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$.

定理 4.5.5 设 Λ 是凝聚 FP-环，则 Λ 是 GCD 整环当且仅当 $\mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)\leqslant 1,\forall\ \alpha,\beta\in\Lambda$.

证明 若 Λ 是 GCD 整环，对任意 $\alpha,\beta\in\Lambda$，如果(α,β)是主理想，由于 Λ 是整环，因此存在 Λ-同构$(\alpha,\beta)\cong\Lambda$. 因而 $\mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)=0$. 如果$(\alpha,\beta)$不是主理想，考虑 Λ-模的正合列

$$0\to K\to\Lambda^{(2)}\xrightarrow{f}(\alpha,\beta)\to 0,\tag{1}$$

这里 $f(1,0)=\alpha, f(0,1)=\beta, K=\mathrm{Ker}f\cong(\alpha)\cap(\beta)$. 由于 Λ 是 GCD 环，令$[\alpha,\beta]=\gamma$，因此存在 α'，$\beta'\in\Lambda$，使得 $\alpha=\gamma\alpha'$，$\beta=\gamma\beta'$，且$[\alpha',\beta']=1$. 记 $\lambda=\gamma\alpha'\beta'$，则$(\lambda)\subseteq(\alpha)\cap(\beta)$. 其次，若 $x\in(\alpha)\cap(\beta)$，则存在 $s,t\in\Lambda$，使得 $x=s\alpha=t\beta$，因而有 $s\gamma\alpha'=t\gamma\beta'$. 但 Λ 是整环，于是 $s\alpha'=t\beta'$. 因$[\alpha',\beta']=1$，故 $\alpha'\mid t$，即 $t=\alpha't'$，$t'\in\Lambda$.

$$\therefore\quad x=t\beta=\alpha't'\beta=\alpha't'\gamma\beta'=t'\lambda.$$

因 $x\in(\lambda)$，故$(\alpha)\cap(\beta)=(\lambda)$. 从而 $K\cong(\lambda)$. 又因 Λ 是整环，故 K 是投射 Λ-模．再由(1)就得 $\mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)\leqslant 1$.

反过来，对任意 $0\neq\lambda\in\Lambda$，考虑 Λ-模的正合列

$$0\to\mathrm{Ann}(\lambda)\to\Lambda\to(\lambda)\to 0.\tag{2}$$

因 Λ 是凝聚环，故 $\mathrm{Ann}(\lambda)$是 f. p. 的．于是由题设知 $\mathrm{pd}_{\Lambda}(\lambda)\leqslant 1$. 故 $\mathrm{pd}_{\Lambda}\mathrm{Ann}(\lambda)=0$. 因此 $\mathrm{Ann}(\lambda)$是 f. g. 投射模. 但 Λ 是 FP-环，故 $\mathrm{Ann}(\lambda)$是自由模．又因 $\lambda\neq 0$，故必有 $\mathrm{Ann}(\lambda)=0$. 所以 Λ 是整环．其次，设 $\alpha,\beta\in\Lambda$，如果(α,β)不是主理想，因 $\mathrm{pd}_{\Lambda}(\alpha,\beta)\leqslant 1$，故由(1)得 $\mathrm{pd}_{\Lambda}K=0$. 又由于 Λ 是凝聚环，因此 K 是 f. g. 的. 从而 K 是 f. g. 投射模．但 Λ 是 FP-环，故 K 又是自由模．这样，$K\cong(\alpha)\cap(\beta)$是自由模，且 Λ 是整环. 因此$(\alpha)\cap(\beta)$必是一个主理想. 从而 K 是秩为 1 的自由模. 令(α_1,β_1)是 K 的生成元，因 $f(-\beta,\alpha)=-\beta\alpha+\alpha\beta=0$，$(-\beta,\alpha)\in K$，故存在 $d\in\Lambda$，使得$(-\beta,\alpha)=d(\alpha_1,\beta_1)$. 因此 $\alpha=d\alpha_1$，$\beta=-d\beta_1$. 另外，容易证明 $d=[\alpha,\beta]$. 故 Λ 是 GCD 整环.

由推论 4.5.3 知，有限整体维数的 Noether FP-环是唯一分解整环．现在，我们要证明其逆也成立．下面，用 UFD 和 PID 分别表示唯一分解整环和主理想整环．

定理 4.5.6* **(Quillen-Suslin)** 设 Λ 是 PID，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是环 Λ 上未定元，则 $\Lambda[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是 FP-环.

证明 可参考文献[75](定理 4.63).

定理 4.5.7 设 Λ 是交换环，则 Λ 是 UFD$\Leftrightarrow\Lambda$ 是整体维数有限的 Noether FP-环.

证明 若 Λ 是整体维数有限的 Noether FP-环，则由推论 4.5.3 知 Λ 是 UFD.

反过来，因 Λ 是 UFD，则 Λ 是 PID，或 Λ 是 PID 整环上的多项式环. 由定理 4.5.6 知 Λ 是 FP-环．显然，Λ 也是 Noether 环. 又由 Hilbert's-Syzygy 定理得 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda<\infty$. 所以 Λ 是整体维数有限的 Noether FP-环.

4.6 $(a,2,b)$-FP 环的分类

现在我们讨论整体维数为 1 和 2 的 FP-环，特别地要研究$(a,2,b)$-FP 环的分类特征．本节所指的环皆是交换环．

定理 4.6.1 环 Λ 是 FP-环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=1\Leftrightarrow\Lambda$ 为 PID，但 Λ 不

是半单环.

证明 若 Λ 是 FP-环, gl. dim$\Lambda=1$, 则由推论 4.5.4 知 Λ 是 PID. 又因 gl. dim$\Lambda\neq 0$, 故 Λ 不是半单环.

反过来, 若 Λ 是 PID, 则由推论 4.5.4 知 Λ 是 FP-环, 且 gl. dim$\Lambda\leqslant 1$. 又因 Λ 不是半单环, 故 gl. dim$\Lambda=1$.

定义 称环 Λ 为 (a,b,c)-环, 如果 $a=$W. gl. dimΛ, $b=$gl. dimΛ, $c=$Ng. dimΛ.

下面,我们证明整体维数为 2 的 FP-环也是凝聚环.

命题 4.6.2 设 Λ 是局部环, 且 gl. dim$\Lambda=2$, 则 Λ 是凝聚环.

证明 设 I 是 Λ 的 f. g. 理想, 于是得正合列

$$0\to K\to \Lambda^{(n)}\to I\to 0. \tag{1}$$

因 gl. dim$\Lambda=2$, $\text{pd}_\Lambda I\leqslant 1$, 故 $\text{pd}_\Lambda K=0$, 即 K 是投射模. 但 Λ 是局部环, 因此 K 是自由模, 且它的秩不超过 n. 于是 I 为 f. p. 的. 故 Λ 是凝聚环.

命题 4.6.3* 设 Λ 是交换环, 则下列陈述是等价的:

(i) 投射理想是 f. g. 的;

(ii) 设 A 是投射 Λ-模, 且 A_P 是 f. g. Λ_P-模, $\forall\ P\in \text{Spec}(\Lambda)$, 则 A 是 f. g. Λ-模(文献[83]).

推论 4.6.4 设 Λ 是整环, 且 gl. dim$\Lambda=2$, 则 Λ 是凝聚环.

证明 设 I 是 Λ 的 f. g. 理想, 于是得 Λ-模正合列

$$0\to K\to \Lambda^{(n)}\to I\to 0. \tag{2}$$

因 gl. dim$\Lambda=2$, 故 $\text{pd}_\Lambda K=0$, 即 K 是投射 Λ-模. 其次, 对任意 $P\in$ Spec(Λ), 由(2)可得 Λ_P-模正合列

$$0\to K_p\to \Lambda_P^{(n)}\to I_P\to 0.$$

由引理 3.2.8 得

$$\text{gl. dim}\Lambda_P\leqslant \text{gl. dim}\Lambda=2,$$

且 Λ_P 是局部环. 又根据命题 4.6.2 知 Λ_P 是凝聚环, 故 K_P 是 f. g. Λ_P-模. 但 Λ 是整环, Λ 的每个投射理想是 f. g. 的, 故应用命题 4.6.3 知 K 是 f. g. Λ-模. 因此 I 是 f. p. 的. 所以 Λ 是凝聚环.

引理 4.6.5 设 Λ 是 FP-环, 且 gl. dim$\Lambda=2$, 则 Λ 是凝聚环.

证明 设 I 是 Λ 的投射理想，因 Λ 是 FP-环，易知 Λ 是不可分的，故 I 是自由模，因而必是主理想．这样，Λ 满足命题 4.6.3(i)．再仿照证明推论 4.6.4 的方法，便知 Λ 是凝聚环.

引理 4.6.6 设 Λ 是 FP-环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，则

$$\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda\neq 2.$$

证明 由引理 4.6.5 知，Λ 是凝聚环．若 $\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda=2$，则根据推论 2.4.9，存在 Λ 的一个非 f.g. 理想 I，使 $\mathrm{Ng.\,dim}_\Lambda I=1$．于是得 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to I\to 0$，其中 F 是非 f.g. 投射模，K 是 f.g. 的．因 Λ 是凝聚环，故 Λ_P 也是凝聚环，$\forall\ P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$，且 $\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda=2$．又由命题 2.4.15 知 Λ_P 是 Noether 环．因此 I_P 是 Λ_P 的 f.g. 理想和 K_P 是 f.g. Λ_P-模，并由正合列 $0\to K_P\to F_P\to I_P\to 0$ 知 F_P 是 f.g. Λ_P-模，$\forall\ P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$．但 Λ 是凝聚 FP-环，且 $\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，故由引理 4.5.1 知 Λ 是整环．从而 Λ 的每个投射理想是 f.g. 的．于是由命题 4.6.3 知 F 是 f.g. 的．这就导出矛盾，所以 $\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda\neq 2$.

定理 4.6.7 设 Λ 是整体维数为 2 的 FP-环，则 Λ 的三种维数是 $(1,2,3)$，$(2,2,0)$或$(2,2,3)$.

证明 由引理 4.6.5 和定理 4.5.5 知 Λ 是 GCD 整环．因弱整体维数为 0 的整环必是域，这与 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$ 相矛盾．于是得 $0<\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$．因此 $\mathrm{W.\,gl.\,dim}\Lambda=1$ 或 2．又由引理 4.6.6，推论 2.4.2 和定理 2.4.5 也可推知 $\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda=0$ 或 3.

综合以上讨论，由定理 2.4.5 知，Λ 的三种维数是$(1,2,3)$，$(2,2,0)$或$(2,2,3)$.

下面，进一步刻划 Λ 的三种维数$(a,2,b)$所包含的环的特征性质.

引理 4.6.8 环 Λ 是$(2,2,0)$-FP-环当且仅当 $\Lambda\cong R[x_1,x_2]$，或 $\Lambda\cong D[x_1]$，这里 x_1,x_2 是未定元，R 是半单环，D 是 PID，但非半单环.

证明 若 Λ 是$(2,2,0)$-FP-环，因 $\mathrm{Ng.\,dim}\Lambda=0$，则由 2.4 节知 Λ 是 Noether 环．于是 Λ 为整体维数为 2 的 Noether FP-环．又根据定理 4.5.7 知 Λ 是 UFD 整环．从而 Λ 是 PID，或 Λ 是 PID 上的多项式环．但 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，故 $\Lambda\cong R[x_1,x_2]$，或 $\Lambda\cong D[x_1]$，这里 R 是半单环，D 是 PID 但非半单环．

反过来，由 Quilien-Suslin 定理知 Λ 是 FP-环. 又由 Hillbert's-Syzygy 定理得 gl. dim$\Lambda=2$. 继而由于 Λ 是 Noether 环，因此 W. gl. dimΛ=gl. dim$\Lambda=2$，和 Ng. dim$\Lambda=0$. 故 Λ 是(2,2,0)-FP-环.

引理 4.6.9 环 Λ 是(1,2,3)-FP-环当且仅当 Λ 是 Bézout 整环，且每个非 f.g. 的理想(至少存在一个)的投射维数为 1.

证明 若 Λ 是(1,2,3)-FP-环，则由引理 4.6.5 和引理 4.5.1 知 Λ 是凝聚整环. 设 I 是 Λ 的 f.g. 理想，因 Λ 是凝聚环，I 是 f.p. 的，故得 $\mathrm{fd}_\Lambda I=\mathrm{pd}_\Lambda I\leqslant 1$. 若 $\mathrm{pd}_\Lambda I=1$，则 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/I)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/I)=2$. 这与 W. gl. dim$\Lambda=1$ 相矛盾，所以 $\mathrm{pd}_\Lambda I=0$. 因而 I 是 f.g. 投射模. 但 Λ 是 FP-环，故 I 为 f.g. 自由模. 又由于 Λ 是整环，I 是主理想，因此 Λ 为 Bézout 整环. 又因 gl. dim$\Lambda=2$，故根据定理 2.3.1 知，Λ 的每个非 f.g. 理想的投射维数$\leqslant 1$，且至少存在一个非f.g. 理想的投射维数为1.

反过来，因 Λ 是 Bézout 整环，故 Λ 是 FP-环. 又因 Bézout 整环是 Prüfer 整环，故由定理 2.3.17 得 W. gl. dim$\Lambda\leqslant 1$. 但 Λ 含有一个理想 I，且 $\mathrm{pd}_\Lambda I=1$，因此 Λ 不是域. 故 W. gl. dim$\Lambda=1$. 又因 Λ 的理想的投射维数$\leqslant 1$，且存在一个理想 I，$\mathrm{pd}_\Lambda I=1$，故得 $1\leqslant$gl. dim$\Lambda\leqslant 2$. 再由定理 2.3.13 知 gl. dim$\Lambda=2$. 因而应用定理 2.4.5 得Ng. dim$\Lambda=3$. 所以 Λ 是(1,2,3)-FP-环.

定义 设 Λ 是交换环，$\Lambda^{(n)}$是秩为 n 的自由 Λ-模，$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\Lambda^{(n)}$，若存在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in\Lambda$，使得 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n=1$，则称元素$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为幺模列.

定义 设 Λ 是交换环，若对任何 n，每个幺模列$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是 Λ 上某个 n 阶可逆矩阵的第一列，则称环 Λ 为具有幺模列性质，简记为 UCP.

命题 4.6.10 设 Λ 是 FP-环，则 Λ 为 UCP.

证明 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\in\Lambda^{(n)}$是幺模列，则存在 $\beta_i\in\Lambda$，使得 $\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i=1$. 定义 $\varphi:\Lambda^{(n)}\to\Lambda$ 使$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mapsto\sum_{i=1}^n\lambda_i\beta_i$，$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\Lambda^{(n)}$. 因 $\varphi(\alpha)=1$，故得 Λ-模的正合列

$$0\to K\to\Lambda^{(n)}\xrightarrow{\varphi}\Lambda\to 0,\qquad(3)$$

这里 $K=\mathrm{Ker}\varphi$. 由于正则模 Λ 是投射模，序列(3)分裂，因此得

$$\Lambda^{(n)}=K\oplus\langle\alpha\rangle.$$

因 Λ 是 FP-环，故 K 是秩为 $n-1$ 的自由模．设$\{e_2,e_3,\cdots,e_n\}$是 K 的基，则$\{\alpha,e_2,\cdots,e_n\}$是 $\Lambda^{(n)}$的基．令

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1),$$

则$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$也是 $\Lambda^{(n)}$的标准基．定义 $\sigma:\Lambda^{(n)}\to\Lambda^{(n)}$使 $\sigma(\varepsilon_1)=\alpha$, $\sigma(\varepsilon_i)=e_i$, $i=2,3,\cdots,n$, 则 σ 是一个可逆的线性变换，σ 关于基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$的矩阵的第一列是 α. 所以 Λ 为 UCP.

定义 设 P 是 f.g. Λ-模，若存在 f.g. 自由 Λ-模 F，使得 $P\oplus F$ 是自由模，则称 P 为稳定自由的.

命题 4.6.11 设 Λ 为 UCP 环，则每个稳定自由模是自由模.

证明 设 P 是稳定自由的，由数学归纳法原理，我们仅需讨论 $P\oplus\Lambda$ 是自由模的情形．令 $P\oplus\Lambda=\Lambda^{(n)}$，而 π 是 $\Lambda^{(n)}$关于 Λ 的投射，$\mathrm{Ker}\pi=P$，且$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$是 $\Lambda^{(n)}$的标准基，于是存在 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\Lambda^{(n)}$，使得 $1=\pi(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i\pi(\varepsilon_i)$. 故 α 是幺模列. 而 Λ 为 UCP 环，故存在 Λ 上 n 阶可逆矩阵 M，使得 $\alpha=M\varepsilon_1$. 令 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 是 M 的第 $2,3,\cdots,n$ 列，定义 $\sigma:\Lambda^{(n)}\to\Lambda^{(n)}$使$\sigma(\varepsilon_1)=\alpha$, $\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i$, $i=2,3,\cdots,n$,则 σ 是一个线性变换．令 $\pi(\alpha_i)=\lambda_i$, $i\geqslant2$. 把矩阵 M 的第 1 列分别乘以$-\lambda_2$, $-\lambda_3,\cdots,-\lambda_n$，加到第 2,第 3,…,第 n 列，又得到 Λ 上一个 n 阶可逆矩阵 U,它的第 1 列是 α，第 2,第 3,…,第 n 列分别是$\alpha'_2=\alpha_2-\lambda_2\alpha$, $\alpha'_3=\alpha_3-\lambda_3\alpha$, $\cdots,\alpha'_n=\alpha_n-\lambda_n\alpha$，并且有

$$\pi(\alpha'_i)=\pi(\alpha_i)-\lambda_i\pi(\alpha)=\lambda_i-\lambda_i=0,\forall\ i\geqslant2.$$

因此 $\alpha'_i\in P,\forall\ i\geqslant2$. 不失一般性，我们用矩阵 U 代替矩阵 M，于是 $\sigma:\Lambda^{(n)}\to\Lambda^{(n)}$使 $\sigma(\varepsilon_i)=\alpha'_i$，且 $\alpha'_i\in P,i\geqslant2$. 因此 $\sigma'=\sigma|\langle\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n\rangle$: $\langle\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n\rangle\to P$ 是 Λ-同态．显然，σ'是单同态．若 $\beta\in\Lambda^{(n)}$，则存在 $\gamma=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varepsilon_i$，使得 $\sigma(\gamma)=\beta$. 因此 $\beta=\sigma(\gamma_1\varepsilon_1+\delta)$，这里 $\delta=\sum_{i=2}^{n}\gamma_i\varepsilon_i$. 特别地，若 $\beta\in P$，则必有

$$\beta-\sigma(\delta)=\gamma_1\sigma(\varepsilon_1)=\gamma_1\alpha\in P\cap\langle\alpha\rangle=0.$$

从而 $\beta\in\mathrm{Im}\sigma'$. 所以 σ'是满同态.

$\therefore \quad \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n \rangle \cong P.$

因此 P 是自由模.

定义 设 Λ 是交换环，若每个稳定自由 Λ-模是自由的，则称 Λ 为 PSF 环.

由命题 4.6.10 和命题 4.6.11 知，环 Λ 是 FP-环当且仅当 Λ 是 PSF 环和每个 f.g. 投射模是稳定自由的.

引理 4.6.12 环 Λ 是(2,2,3)-FP-环当且仅当 Λ 是凝聚 PSF 整环，但非 Noether 环；并且，每个 f.g. 投射模是稳定自由的，Λ 的每个理想的投射维数 $\leqslant 1$，至少存在一个投射维数为 1 的 f.g. 理想.

证明 若 Λ 是(2,2,3)-FP- 环，则 Λ 是 UCP 和 PSF 环，且由引理 4.6.5 和引理 4.5.1 知 Λ 是凝聚整环. 但 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=3$，根据 2.4 节知 Λ 为非 Noether 环. 又由于 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$，因此对 Λ 的任意理想 I，有 $\mathrm{pd}_\Lambda I\leqslant 1$，并且至少存在一个 f.g. 理想，它的投射维数为 1.

反过来，因 Λ 是 PSF 环，且每个 f.g. 投射模是稳定自由的，故 Λ 是 FP-环. 由于 Λ 是凝聚环，因此它的每个理想的投射维数 $\leqslant 1$，且至少存在一个投射维数为 1 的 f.g. 理想. 于是得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda=2.$$

又因 Λ 非 Noether 环，故 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 0$. 又由推论 2.4.2 知 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda\neq 1$. 最后，根据引理 4.6.6 和定理 2.4.5 得 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=3$. 所以 Λ 是(2,2,3)-FP-环.

定理 4.6.13 设 Λ 是 FP-环且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$，则 Λ 的三种维数(2,2,0)，(1,2,3)和(2,2,3)所包含的环的特征分别由引理 4.6.8，引理 4.6.9 和引理 4.6.12 所刻划.

证明 由定理 4.6.7，引理 4.6.8，引理 4.6.9 和引理 4.6.12，便知结论成立.

4.7 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$ 的凝聚环

在 2.4 节里，我们曾经讨论了 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$ 的环，并且证得：任意

凝聚局部环 Λ 的 Ng. dim$\Lambda\neq2$. 这节里，我们将推广这个结果，并且，研究 Ng. dim$\Lambda=2$ 的凝聚正则环与它的分解的关系. 本节所指的环均是交换凝聚环.

定理 4.7.1 设 Λ 是交换凝聚环,且每个投射理想是 f. g. 的. 则 Ng. dim$\Lambda\neq2$.

证明 若 Ng. dim$\Lambda=2$，因 Λ 是凝聚环，故由推论 2.4.9 知，存在 Λ 的非 f. g. 理想 I，使得 Ng. dim$_\Lambda I=1$. 于是得 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to I\to 0,$$

其中 F 是非 f. g. 的投射模，而 K 是 f. g. 的. 令 $P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$，根据命题 2.4.14 知，Ng. dim$_{\Lambda_P}I_P\leqslant1$. 若 Ng. dim$_{\Lambda_P}I_P=1$，因 Λ_P 是局部环，应用推论 2.4.11 得 I_P 是 a. f. p. 的. 于是

$$I_P=I'_P\oplus I''_P,$$

其中 I'_P是环 Λ_P 的 f. p. 理想，I''_P是环 Λ_P 的非 f. g. 自由理想. 但 Λ_P 的自由理想 I''_P必是主理想，这就导出矛盾. 因此Ng. dim$_{\Lambda_P}I_P\neq1$. 于是得 Ng. dim$_{\Lambda_P}I_P=0$. 从而 I_P 是 f. p. Λ_P-模. 另外，K_P 也是 f. g. Λ_P-模. 所以，由 Λ_P-模的正合列

$$0\to K_P\to F_P\to I_P\to 0$$

知，F_P 是 f. g. Λ_P-模，$\forall\ P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$. 又因 Λ 的每个投射理想是 f. g. 的，故由命题 4.6.3 知 F 是 f. g. Λ-模. 这就导出矛盾，所以Ng. dim$\Lambda\neq2$.

推论 4.7.2 凝聚局部环，凝聚整环的 Ng 维数$\neq2$.

推论 4.7.3 设 Λ 是不可分凝聚环，且它的每个主理想具有有限投射维数，则 Ng. dim$\Lambda\neq2$.

证明 由定理 4.4.13 知 Λ 是整环. 于是由推论 4.7.2 就得 Ng. dim$\Lambda\neq2$.

定理 4.7.4 设 Λ 是凝聚正则环，且 Ng. dim$\Lambda=2$，则

(i) Λ 不可能具有有限不可分分解；

(ii) 设 e 是 Λ 的幂等元，则 e 是本原的当且仅当 $e\Lambda$ 是 Noether 整环；

(iii) Λ 中任意两个元素生成的理想的投射维数$\leqslant1$.

证明 (i) 若 Λ 具有有限不可分分解，则得

$$\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n,$$

其中每个 Λ_i 是不可分的环．因 Λ 是凝聚正则的，故每个 Λ_i 也是凝聚正则的．又因 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$. 故必有某个 Λ_i，使得$\mathrm{Ng.dim}\Lambda_i=2$. 这与推论 4.7.3 相矛盾，所以 Λ 没有有限不可分分解．

(ii) 设 e 是 Λ 的幂等元，于是得

$$\Lambda=e\Lambda\oplus(1-e)\Lambda.$$

根据推论 2.4.2 知 $\mathrm{Ng.dim}(e\Lambda)\neq1$. 又因 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$，故

$$1\neq\mathrm{Ng.dim}(e\Lambda)\leqslant2.$$

若 e 是本原的，则由推论 1.5.10 知 $e\Lambda$ 是不可分的．因而根据题设知，$e\Lambda$ 是投射维数有限的不可分凝聚环. 但由定理 4.4.13 知 $e\Lambda$ 是整环，于是根据推论 4.7.2 知 $\mathrm{Ng.dim}(e\Lambda)\neq2$. 因此$\mathrm{Ng.dim}(e\Lambda)=0$. 故 $e\Lambda$ 是 Noether 整环．

反过来，因 $e\Lambda$ 是整环，故 $e\Lambda$ 是不可分的．

(iii) 设 $\alpha,\beta\in\Lambda$，则(α,β)是 f.p. 理想. 由定理 4.1.7 得

$$\mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)=\mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(\alpha,\beta)_m\mid\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

其次，因 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda=2$，且 Λ_P 是凝聚环，$\forall\ P\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，故由命题 2.4.15 知 Λ_m 是 Noether 环，$\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$. 因此 Λ_m 是 Noether 局部环，且每个 f.g. 理想的投射维数是有限的. 再由定理 3.3.5 可知 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_m<\infty$. 于是根据定理 3.5.13 知 Λ_m 是 UFD 整环．最后，根据定理 3.5.17 得 $\mathrm{pd}_{\Lambda_m}(\alpha,\beta)_m\leqslant1$，$\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$.

$\therefore\quad \mathrm{pd}_\Lambda(\alpha,\beta)\leqslant1$，$\forall\ \alpha,\beta\in\Lambda$.

推论 4.7.5 设 Λ 是不可分凝聚环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$，则 Λ 的三种维数是(1,2,3)，(2,2,0)和(2,2,3). 并且

若 Λ 是(1,2,3)-环，则 Λ 是非 Noether 的 Prüfer 整环；

若 Λ 是(2,2,0)-环，则 Λ 是 Noether 整环；

若 Λ 是(2,2,3)-环，则 Λ 是非 Noether 整闭整环．

证明 首先，由定理 4.4.13 知 Λ 是整环．因弱整体维数为 0 的整环必是域，而 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$，故 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\neq0$. 于是得 $0<\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$. 因此 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=1$ 或 2. 因 Λ 是不可分凝聚

环，故根据推论4.7.3知Ng. dim$\Lambda\neq 2$. 又由推论2.4.2知Ng. dim$\Lambda\neq 1$. 最后，应用定理 2.4.5 得 Λ 的三种维数是(1,2,3)，(2,2,0)和(2,2,3).

若 Λ 是(1,2,3)-环，因 W. gl. dim$\Lambda=1$，且 Λ 是凝聚环，则由定理 2.3.17 知 Λ 是半遗传环．又知 Λ 是整环，故 Λ 为 Prüfer 整环．因为 Ng. dim$\Lambda\neq 0$，所以 Λ 是非 Noether 的．

若 Λ 是(2,2,0)-环，则由 Ng. dim$\Lambda=0$ 知 Λ 是 Noether 环. 因此 Λ 是 Noether 整环．

若 Λ 是(2,2,3)-环，则由 Ng. dim$\Lambda=3$ 知. Λ 是非 Noether 环．其次，对任意 $P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$，$\Lambda_p$ 是凝聚局部环，且 gl. dim$\Lambda_P\leqslant$gl. dim$\Lambda=2$. 又由定理 4.5.2 知 Λ_P 是 GCD 整环．但 GCD 整环必是整闭整环，因此 Λ_P 是整闭整环，$\forall P\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$. 而环的整闭性是局部性质，所以 Λ 是整闭整环.

第五章

π-凝聚环和 FGT-维数

π-凝聚环是介于 Noether 环和凝聚环之间的一类环，π-凝聚环的概念首先是由 Marsha Finkel Jones 于 1978 年提出的（[48]），V. Camillo（[16]），Mingyi Wang（[86]）都对它进行了研究. 在这章里，先介绍 π-凝聚环的概念及其基本性质，然后引进 FGT-投射维数、FGT-内射维数和 FGT-平坦维数，讨论 FGT-维数的计算法则以及 π-凝聚环的结构性质.

5.1 模范畴的等价性和对偶性

π-凝聚环与模的对偶性有密切联系，本节将介绍模范畴的对偶性以及相关的等价性，主要介绍一些基本概念、基本性质、Morita 等价和 Morita 对偶. 这里，对一些结论不再给出详细证明，仅列出参考文献.

本节所指的环是任意的，不要求是交换环.

定义 设 Λ、Γ 是环，$F:\mathscr{C}_\Lambda\to\mathscr{C}_\Gamma$是加法共变函子. 若存在一个加法共变函子 $G:\mathscr{C}_\Gamma\to\mathscr{C}_\Lambda$，使得 GF 与模范畴 $\mathscr{C}_\Lambda$上的恒等函子是自然等价的，而 FG 与模范畴 $\mathscr{C}_\Gamma$ 上的恒等函子也是自然等价的，则称 F 为一个等价.

若存在一个由 $\mathscr{C}_\Lambda$到 $\mathscr{C}_\Gamma$的等价，则称范畴 $\mathscr{C}_\Lambda$与 $\mathscr{C}_\Gamma$是（Morita）等价的，环 Λ 与 Γ 是（Morita）等价的，并记作 $\mathscr{C}_\Lambda\approx\mathscr{C}_\Gamma$，$\Lambda\approx\Gamma$.

设 $F:\mathscr{C}_\Lambda\to\mathscr{C}_\Gamma$是加法共变函子，$A,A'\in\mathscr{C}_\Lambda$，则由 F 可以得到Abel群同态

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,A')\to\mathrm{Hom}_{\Gamma}(F(A),F(A')).\qquad(1)$$

定义　设$F:\mathscr{C}_{\Lambda}\to\mathscr{C}_{\Gamma}$是加法共变函子，若对任意$A,A'\in\mathscr{C}_{\Lambda}$，(1)都是同构，则称函子$F$是完全忠实的.

定理 5.1.1　设$F:\mathscr{C}_{\Lambda}\to\mathscr{C}_{\Gamma}$是加法共变函子，则$F$是等价的当且仅当它满足以下条件：

(i) F是完全忠实的；

(ii) $\mathscr{C}_{\Gamma}$的每个模必相应地与某个模$F(A)$同构，这里$A\in\mathscr{C}_{\Lambda}$.

证明见文献[105]5.2节定理1.

下面给出等价的 Morita 特征.

定义　设Λ和Λ'是环，$A={}_{\Lambda'}A_{\Lambda}$是$(\Lambda',\Lambda)$-双模，$A'={}_{\Lambda}A'{}_{\Lambda'}$是$(\Lambda,\Lambda')$-双模，而$\tau:A'\otimes_{\Lambda'}A\to\Lambda$是$(\Lambda,\Lambda)$-双同态，$\mu:A\otimes_{\Lambda}A'\to\Lambda'$是$(\Lambda',\Lambda')$-双同态，并且若令$\tau(x'\otimes x)=(x',x)$和$\mu(x\otimes x')=[x,x']$，必有

(i) $[x,y']y=x(y',y)$,

(ii) $x'[x,y']=(x',x)y'$,

$\forall\ x,y\in A,x',y'\in A'$，则称$(\Lambda,\Lambda',A,A',\tau,\mu)$是 Morita 关系组.

例　设Λ是环，A_{Λ}是右Λ-模，令$\Lambda'=\mathrm{End}(A_{\Lambda})$，$A^{*}=\mathrm{Hom}(A_{\Lambda},\Lambda_{\Lambda})$. 若$\lambda\in\Lambda,\lambda'\in\Lambda',x\in A,y^{*}\in A^{*}$，规定

$$\lambda'x=\lambda'(x),(\lambda y^{*})(x)=\lambda(y^{*}(x)),(y^{*}\lambda')(x)=y^{*}(\lambda'x),$$

则A是(Λ',Λ)-双模，A^{*}是(Λ,Λ')-双模. 我们还规定

$\tau_{A}:A^{*}\otimes_{\Lambda'}A\to\Lambda$使$\tau_{A}(y^{*}\otimes x)=(y^{*},x)$,

$\mu_{A}:A\otimes_{\Lambda}A^{*}\to\Lambda'$使$\mu_{A}(x\otimes y^{*})=[x,y^{*}]$,

这里$(y^{*},x)=y^{*}(x)$，$[x,y^{*}](y)=x(y^{*},y)$，$y\in A$. 不难验证τ_{A}是(Λ,Λ)-双同态，μ_{A}是(Λ',Λ')-双同态并且满足等式(i)和(ii). 故$(\Lambda,\Lambda'=\mathrm{End}(A_{\Lambda}),A_{\Lambda},A^{*}=\mathrm{Hom}(A_{\Lambda},\Lambda_{\Lambda}),\tau_{A},\mu_{A})$是 Morita 关系组.

定理 5.1.2　设P是$\mathscr{C}^{R}_{\Lambda}$的 f.g. 投射生成元，则 Morita 关系组$(\Lambda,\Lambda'=\mathrm{End}(P_{\Lambda}),P,P^{*}=\mathrm{Hom}(P_{\Lambda},\Lambda),\tau,\mu)$中$\tau,\mu$是满射. 并且，令$F=\mathrm{Hom}(P_{\Lambda},\text{-})$，$Q=-\otimes_{\Lambda'}P$，则$F:\mathscr{C}^{R}_{\Lambda}\to\mathscr{C}^{R}_{\Lambda'}$是一个等价，$G:\mathscr{C}^{R}_{\Lambda'}\to\mathscr{C}^{R}_{\Lambda}$是$F$的逆等价.

证明见文献[105]5.3节定理1和定理2.

定理 5.1.3　设Λ和Λ'是环，$F:\mathscr{C}^{R}_{\Lambda}\to\mathscr{C}^{R}_{\Lambda'}$是一个等价，

$G: \mathscr{C}_{\Lambda'}^R \to \mathscr{C}_{\Lambda}^R$是 F 的逆等价，则存在双模${}_{\Lambda'}P_{\Lambda}$，${}_{\Lambda}P'_{\Lambda'}$和 Morita 关系组$(\Lambda, \Lambda', P, P', \tau, \mu)$，其中 τ, μ 是满射，并且 $F \cong \mathrm{Hom}(P_{\Lambda}, -)$ 和 $G \cong (-\otimes_{\Lambda'} P)$.

证明见文献[105]5.3 节定理 3.

模范畴的对偶性是除环上向量空间的对偶性的推广，在文献[11]和[63]中建立了 Morita 对偶理论. 这里，我们只能作初步介绍.

定义 设${}_{\Lambda}C$ 和 D_{Γ} 分别是模范畴 $\mathscr{C}_{\Lambda}^L$ 和 $\mathscr{C}_{\Gamma}^R$ 的全子范畴，$H': {}_{\Lambda}C \to D_{\Gamma}$ 和 $H'': D_{\Gamma} \to {}_{\Lambda}C$ 是加法逆变函子. 若有函子的自然等价

$$H''H' \cong I_{{}_{\Lambda}C} \text{ 和 } H'H'' \cong I_{D_{\Gamma}},$$

则称 H' 和 H'' 是对偶函子，而称${}_{\Lambda}C$ 与 D_{Γ} 为对偶范畴.

设 Λ 和 Γ 是环，${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是双模，则

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, {}_{\Lambda}U_{\Gamma}): \mathscr{C}_{\Lambda}^L \to \mathscr{C}_{\Gamma}^R,$$

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(-, {}_{\Lambda}U_{\Gamma}): \mathscr{C}_{\Gamma}^R \to \mathscr{C}_{\Lambda}^L$$

是两个加法逆变函子. 把这两个函子叫做 U-对偶函子，且皆简记为

$$(\quad)^* = \mathrm{Hom}(-, {}_{\Lambda}U_{\Gamma}).$$

U-对偶函子与模范畴的对偶性有重要联系.

设 $f: A_1 \to A_2$ 是左 Λ-同态，则 $f^*: A_2^* \to A_1^*$ 是右 Γ-同态，$f^{**}: A_1^{**} \to A_2^{**}$ 是左 Λ-同态. 我们把 $A^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, U_{\Gamma})$叫做 A 的 U-对偶模，$f^* = \mathrm{Hom}(f, U)$ 叫做 f 的 U-对偶映射，而把 $A^{**} = \mathrm{Hom}_{\Gamma}(A^*, {}_{\Lambda}U)$与 $f^{**} - \mathrm{Hom}(f^*, U)$分别叫做 A 和 f 的双重对偶和双重对偶映射.

对任意 $A \in \mathscr{C}_{\Lambda}^L$，规定

$$\sigma_A: A \to A^{**} \text{ 使 } \sigma_A(a)(\varphi) = \varphi(a), \forall a \in A, \varphi \in A^*,$$

则 σ_A 是左 Λ-同态. 并且对任意左 Λ-同态 $f: A_1 \to A_2$，必有交换图

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{A_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{A_2}} \\ A_1^{**} & \xrightarrow[f^{**}]{} & A_2^{**} \end{array}$$

我们把 σ_A 称为赋值映射. 由上面讨论，得函子自然变换

$$\sigma: I_{\mathscr{C}_\Lambda^L} \to ((\quad)^*)^*.$$

同样,我们也有函子自然变换

$$\sigma: I_{\mathscr{C}_\Gamma^R} \to ((\quad)^*)^*.$$

定义 设 A 是左 Λ-模. 若 σ_A 是一个同构,则称 A 为 U-自反的;若 σ_A 是单同态,则称 A 为 U-半自反的.

定理 5.1.4 设${}_\Lambda U_\Gamma$ 是双模,A 是左 Λ-模或右 Γ-模, 则 A^* 是 U-半自反的, 并且

(i) $\mathrm{Ker}\sigma_A = \mathrm{Rej}_A(U)$;

(ii) A 是 U-半自反的$\Leftrightarrow\mathrm{Rej}_A(U)=0\Leftrightarrow U$ 余生成 A;

(iii) 若 A 是 U-自反的,则 A^* 也是 U-自反的;

(iv) 若 $A\cong A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$, 则 A 是 U-半自反的(U-自反的)$\Leftrightarrow$ A_1, A_2, $\cdots$, A_n 是 U-半自反的(U-自反的).

证明见文献[105]5.4 节命题 2 至命题 4.

令${}_\Lambda U_\Gamma={}_\Lambda\Lambda_\Lambda$, 若 $\Lambda=F$ 是域,V 是域 F 上向量空间, 则 $V^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(V,\Lambda)$就是空间 V 的对偶空间.

命题 5.1.5 设 P 是 f.g. 投射左 Λ-模, 则

(i) P 是 Λ-自反的;

(ii) P^*是 f.g. 投射右 Λ-模.

定理 5.1.6 设${}_\Lambda C$ 和 D_Γ 分别是模范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 和 $\mathscr{C}_\Gamma^R$ 的全子范畴, 且${}_\Lambda\Lambda\in{}_\Lambda C$, $\Gamma_\Gamma\in D_\Gamma$. 另外, 对任意 $A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$($B\in\mathscr{C}_\Gamma^R$), 若 $A\cong C$($B\cong D$), 则必有 $A\in{}_\Lambda C$($B\in D_\Gamma$), 这里 $C\in{}_\Lambda C$($D\in D_\Gamma$). 令

$$H':{}_\Lambda C\to D_\Gamma,\ H'': D_\Gamma\to{}_\Lambda C$$

是对偶函子,则存在双模${}_\Lambda U_\Gamma$,使得

(i) ${}_\Lambda U\cong H''(\Gamma)$, $U_\Gamma\cong H'(\Lambda)$;

(ii) $H'\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(-,U)$, $H''\cong\mathrm{Hom}_\Gamma(-,U)$;

(iii) ${}_\Lambda C$ 和 D_Γ 中每个模都是 U-自反的.

证明见文献[105]5.4 节定理 1.

定义 设${}_\Lambda U_\Gamma$ 是双模,若以下条件成立,则称双模${}_\Lambda U_\Gamma$ 定义一个 Morita 对偶, 或者称函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,U)$和 $\mathrm{Hom}_\Gamma(-,U)$是 Morita 对偶:

(i) ${}_{\Lambda}\Lambda$ 和 Γ_{Γ} 是 U-自反的；

(ii) U-自反模的每个子模和商模是 U-自反的.

设${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是双模，$\lambda\in\Lambda$，规定

σ_{λ}: $U\to U$ 使 $\sigma_{\lambda}(x)=\lambda x$，$\forall\ x\in U$，

则 $\sigma_{\lambda}\in\mathrm{End}(U_{\Gamma})$，并且 σ: $\lambda\mapsto\sigma_{\lambda}$ 是环 Λ 与自同态环 $\mathrm{End}(U_{\Gamma})$间的环同态. 同样，若 $\gamma\in\Gamma$，规定

ρ_{γ}: $U\to U$ 使 $\rho_{\gamma}(x)=x\gamma$，$\forall\ x\in U$，

则 $\rho_{\gamma}\in\mathrm{End}({}_{\Lambda}U)$，并且 ρ: $\gamma\mapsto\rho_{\gamma}$ 是环 Γ 与自同态环 $\mathrm{End}({}_{\Lambda}U)$间的环同态. 若 σ 和 ρ 都是满射，则称双模${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是平衡的.

定理 5.1.7 设${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是双模，则下列陈述是等价的：

(i) ${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 定义一个 Morita 对偶；

(ii) ${}_{\Lambda}\Lambda$，Γ_{Γ}，${}_{\Lambda}U$ 和 U_{Γ} 的商模是 U-自反的；

(iii) ${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是平衡模，且${}_{\Lambda}U$ 和 U_{Γ} 是内射余生成元.

证明见文献[105]5.4 节定理 1.

用 f.cog. 表示有限余生成.

推论 5.1.8 设${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 定义一个 Morita 对偶，则每个 f.g. 或f.cog. 左 Λ-(右 Γ-)模是 U-自反的.

设${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是双模，A 是左 Λ-模，K 是 A 的子集. 令

$$K'=\{f\in A^{*}\mid f(x)=0,\forall\ x\in K\}=\{f\in A^{*}\mid K\subseteq\mathrm{Ker}f\}$$
$$=\mathrm{Ann}_{A^{*}}K,$$

把 K' 称为 K 在 A^{*} 内的零化子. 易知，K' 是 A^{*} 的子模.

同样，设 M 是 A^{*} 的子集，令

$$M'=\{a\in A\mid f(a)=0,\forall\ f\in M\}=\bigcap\{\mathrm{Ker}f\mid f\in M\}$$
$$=\mathrm{Ann}_{A}M,$$

把 M' 称为 M 在 A 内的零化子，它是 A 的子模.

命题 5.1.9 设${}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ 是双模，A 是左 Λ-模，K 是 A 的子模，则

$$K'\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A/K,U)=(A/K)^{*}.$$

证明 因 K 是 A 的子模，故得正合列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A/K\longrightarrow 0,$$

其中 f 是包含映射. 从而又得正合列

$$0 \longrightarrow (A/K)^* \xrightarrow{g^*} A^* \xrightarrow{f^*} K^*. \tag{2}$$

$\because \quad \ker f^* = \{h \in A^* \mid f^*(h) = 0\}$

$\qquad\qquad = \{h \in A^* \mid hf(x) = h(x) = 0, \forall\ x \in K\}$,

$\therefore \quad \ker f^* = K'$.

因此,$K' \cong (A/K)^*$.

定义 设${}_\Lambda U_\Gamma$是双模,A 是左 Λ-模, K 是 A 的子模. 若 $K = K''$, 则称 K 为 A 的闭子模.

命题 5.1.10 设${}_\Lambda U_\Gamma$ 是双模, A 是左 Λ-模,K 是 A 的子模, 则 K 是闭子模$\Leftrightarrow A/K$ 是 U-半自反的.

证明见文献[105]5.5 节引理 1.

定理 5.1.11 设双模${}_\Lambda U_\Gamma$ 定义一个 Morita 对偶,模${}_\Lambda A$ 和 B_Γ 是 U-自反的,则 A^* 和 B^* 也是 U-自反的,并且下列结论也成立:

(i) 模${}_\Lambda A(B_\Gamma)$和对偶模 $A^*(B^*)$的子模都是闭的;

(ii) 模${}_\Lambda A(B_\Gamma)$和对偶模 $A^*(B^*)$的子模的格是反同构的,其格映射为 $K \to K'$,$\forall$ A 的子模 $K(M \to M'$,$\forall$ B 的子模 $M)$.

证明见文献[105]5.5 节定理 2.

5.2 π-凝聚环的定义及基本性质

本节将引进 π-凝聚环的概念, 给出这类环的特征, 以及 π-凝聚环与凝聚环、Noether 环间的联系.

定义 令 $\prod = \prod \Lambda_\lambda$ 是任意个 Λ_λ 的直积, 若 $\prod$ 的每个f.g. 子模是 f.p. 的, 则称环 Λ 为右 π-凝聚环.

同样,可以定义左 π-凝聚环.

定义 设 Λ 是环,若对任意 f.g. 左 Λ-模 A,$A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$是 f.g. 右 Λ-模, 则称 Λ 是左 $*$-环.

类似地,可以定义右 $*$-环.

由定义知, 右(左)π-凝聚环是右(左)凝聚环.

定理 5.2.1* 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左 π-凝聚的；

(ii) Λ 是右 $*$-环；

(iii) 对任何整数 $n\geqslant 1$，Λ_n 的子集的左零化子是 f.g. 的（文献[16]定理 1）.

由定理 5.2.1 知，左 Noether 环是左 π-凝聚环.

下面，我们进一步刻划 π-凝聚环的特征.

命题 5.2.2* 设 A 是左 Λ-模，B 是右 Λ-模，I 是任意集合，规定 $\varphi=\varphi_{B,A,I}$：$B\otimes_\Lambda A^I\to(B\otimes_\Lambda A)^I$ 使 $b\otimes(\cdots,a_i,\cdots)\mapsto(\cdots,b\otimes a_i,\cdots)$，这里 $b\in B$，$(\cdots,a_i,\cdots)\in A^I$，$i\in I$，则 φ 是自然同态，并且 $\varphi_{B,A,I}$ 是同构（满同态），$\forall$ $I\Leftrightarrow B$ 是 f.p（B 是 f.g.）的（文献[21]P.120）.

命题 5.2.3* 设 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\stackrel{g}{\longrightarrow}A\longrightarrow 0$ 是左 Λ-模的正合列，其中 F 是 f.g. 自由模，A 是半自反模，则 $K\cong B^*$，这里 $B=\operatorname{Coker}(g^*)$为 f.g. 半自反模，$B^*=\operatorname{Hom}_\Lambda(B,\Lambda)$，并且若 A 是 f.g. 自由模，则 B 是 f.p. 的（[文献 50]引理 3）.

定义 设 A 是左 Λ-模，若 $A\cong B^*/K$，这里 B 是 f.g. 右 Λ-模，$B^*=\operatorname{Hom}_\Lambda(B,\Lambda)$，则称 A 为左 W-模.

同样，可以定义右 W-模.

定义 设 A 是左 Λ-模，若 A 是 f.g. 的，并且 A 的每个 W-子模皆是 f.g. 的，则称 A 为左 π 凝聚模.

例如，左 Noether 模是左 π-凝聚模，但反过来不一定成立.

下面，记(　　)$^*=\operatorname{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$.

定理 5.2.4 设 Λ 是环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左 π-凝聚环；

(ii) ${}_\Lambda\Lambda$ 是左 π-凝聚模；

(iii) 每个 f.g. 半自反左 Λ-模是左 π-凝聚模；

(iv) 每个 f.g. 半自反左 Λ-模是 f.p. 的；

(v) $\Lambda^I\otimes_\Lambda A^*\cong(A^*)^I$，$\forall$ f.g. 右 Λ-模 A.

证明 (i)⇒(ii) 设 I 是 Λ 的 W-左理想，于是得 $I\cong A^*/K$，这

里 A 是 f.g. 右 Λ-模. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故由定理 5.2.1 知，A^* 是 f.g. 的. 所以 I 是 f.g. 的. 因此${}_\Lambda\Lambda$ 是左 π-凝聚模.

(ii)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 左 Λ-模，A_1 是 A 的 W-子模，于是得 $A_1 \cong B^*/K$，这里 B 是 f.g. 右 Λ-模. 因此，我们仅需证明 B^* 是 f.g. 的. 设 B 的有限生成集中所含元素个数最小为 n，对 n 作数学归纳法. 若 $n=1$，则有正合列 $0\to I\to\Lambda\to B\to 0$，$I$ 是 Λ 的右理想. 由命题 5.1.9，得 $B^*\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/I,\Lambda)\cong l(I)$. 因 $l(I)$是 Λ 的 W-左理想，故由(ii)可知 B^* 是 f.g. 的. 其次，设 B' 是 B 的循环子模，由正合列 $0\longrightarrow B'\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}B/B'\longrightarrow 0$，得正合列 $0\longrightarrow (B/B')^*\longrightarrow B^*\xrightarrow{f^*}(B')^*$. 由于 $(B')^*\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/J,\Lambda)\cong l(J)$，这里 J 是 Λ 的右理想，因此 $\mathrm{Im}f^*\cong B^*/(B/B')^*$ 为 Λ 的 W-左理想. 故 $\mathrm{Im}f^*$ 是 f.g. 的. 又由归纳法假设，$(B/B')^*$ 也是 f.g. 的. 从而由正合列 $0\to(B/B')^*\to B^*\longrightarrow \mathrm{Im}f^*\to 0$ 可知，B^* 是 f.g. 的. 这样，因 $A_1\cong B^*/K$ 且 B^* 为 f.g. 的，故 A 的 W-子模 A_1 是 f.g. 的. 因此 A 是左 π-凝聚模.

(iii)⇒(i) 由(iii)知${}_\Lambda\Lambda$ 是左 π-凝聚模. 若 B 是任意 f.g. 右 Λ-模，则由上面证明知，B^* 是 f.g. 的. 因而，由定理 5.2.1，Λ 是左 π-凝聚环.

(i)⇒(iv) 设 A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，于是得正合列 $0\longrightarrow K\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，f 是包含映射. 由命题 5.2.3，得正合列 $0\to A^*\to F^*\to B\to 0$，且 $K\cong B^*$，B 为 f.g. 右 Λ-模. 又因 Λ 是左 π-凝聚环，故由定理 5.2.1 知，B^* 是 f.g. 的. 所以 A 是 f.p. 的.

(iv)⇒(i) 设 A 是 f.g. 右 Λ-模，于是得正合列 $0\longrightarrow K\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模. 从而又有正合列 $0\to A^*\to F^*\to B\to 0$，这里 B 是 f.g. 半自反左 Λ-模. 又由(iv)知 B 是 f.p. 的，所以 A^* 是 f.g. 的. 故根据定理 5.2.1 知，Λ 是左 π-凝聚环.

(iv)⇔(v) 由命题 5.2.2 知结论成立.

命题 5.2.5 设 Λ 是左 π-凝聚环，若环 Γ 与 Λ 是 Morita 等价的，

则 Γ 和矩阵环 $M_n(\Lambda)$也是左 π-凝聚的.

证明 设 A 是 f.g. 半自反左 Γ-模，于是得正合列 $0\to A\to\Gamma^I$，这里 I 是指标集. 因而又有 Λ-模的正合列

$$0\to F(A)\to F(\Gamma^I)=F(\Gamma)^I=P^I,$$

这里 F: $\mathscr{C}_\Gamma^L\to\mathscr{C}_\Lambda^L$ 是等价函子，P 是 f.g. 投射生成元. 因此存在指标集 S，使得 $0\to F(A)\to\Lambda^S$ 正合. 故 $F(A)$是 f.g. 半自反左 Λ-模. 但 Λ 是左 π-凝聚环，由定理 5.2.4 知，$F(A)$是 f.p. 的. 故 A 也是 f.p. 的. 因此 Γ 是左 π-凝聚环.

其次，对任意自然数 n，$M_n(\Lambda)$与 Λ 是 Morita 等价的，由上面证明知，$M_n(\Lambda)$是左 π-凝聚环.

命题 5.2.6 设 Λ 是左 π-凝聚环，I 是一个理想，若 I 是左闭的，则 Λ/I 也是左 π-凝聚环.

证明 设 A 是 f.g. 半自反左 Λ/I-模，于是得正合列 $0\to A\to\prod_{AI}(\Lambda/I)$. 因 I 是左闭的，故由命题 5.1.10 知，Λ/I 是半自反左 Λ-模. 因而又有左 Λ-模的正合列 $0\to\Lambda/I\to\prod_\Lambda\Lambda$. 于是 A 也是 f.g. 半自反左 Λ-模. 但 Λ 是左 π-凝聚环，故 A 是 f.p. 的. 所以 A 也是 f.p. 左 Λ/I-模. 因而由定理 5.2.4 知，Λ/I 是左 π-凝聚环.

命题 5.2.7 设 Λ 是环，则 Λ 是左 Noether 环当且仅当 Λ 是左 π 凝聚环，并且，每个左理想皆是 W-左理想.

证明 若 Λ 是左 Noether 环，由定理 5.2.4 知，Λ 是左 π-凝聚环. 其次，设 I 是 Λ 的任意左理想，因 I 是 f.g. 的，故有左 Λ-模的正合列 $0\to K\to\Lambda^{(n)}\to I\to 0$. 因此，$I\cong\Lambda^{(n)}/K\cong F^*/K$，这里 $F^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)},\Lambda)$. 故 I 是 W-左理想.

反过来，设 I 是 Λ 的任意左理想，则 I 是 W-左理想. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故由定理 5.2.4 知，I 是 f.g. 的. 所以 Λ 是左 Noether 环.

我们知道：左 Noether 环⇒左 π-凝聚环⇒左凝聚环，但是其逆一般是不成立的，这里我们给出成立的条件.

命题 5.2.8 (i) 左 π-凝聚环 Λ 是左 Noether 环⇔Λ 的每个左理想是 W-左理想；

(ii) 左凝聚环 Λ 是左 Noether 环$\Leftrightarrow$每个 f.g. 左 Λ-模能嵌入一个 f.p. 左 Λ-模；

(iii) 一个左和右凝聚环是左和右 π-凝聚环$\Leftrightarrow$每个 f.g. 半自反左和右 Λ-模能嵌入 f.g. 自由模.

证明 (i) 由命题 5.2.7 知结论成立.

(ii) 因左 Noether 环上每个 f.g. 左 Λ-模是 f.p. 的，故必要性成立是显然的. 反过来，设 A 是 f.g. 左 Λ-模，于是存在 f.p. 左 Λ-模 P，使得 $0\to A\to P$ 正合. 因 Λ 是左凝聚环，P 必为左凝聚模，故 A 是f.p. 的. 因此 Λ 是左 Noether 环.

(iii) 设 Λ 是左和右凝聚环，若对任意 f.g. 半自反左 Λ-模 A，存在 f.g. 自由左 Λ-模 F，使得 $0\to A\to F$ 正合，则由定理 1.3.7 知，A 是 f.p. 的. 于是根据定理 5.2.4，Λ 是左 π-凝聚环. 同理，可以推得 Λ 是右 π-凝聚环.

反过来，设 A 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故由定理 5.2.1 知 A^* 是 f.g. 的. 于是存在 f.g. 自由右 Λ-模 F，使得 $F\to A^*\to 0$ 正合. 但 A 是半自反的，因此 $0\to A\to F^*$ 正合. 同样，可以推得每个 f.g. 半自反右 Λ-模能嵌入 f.g. 自由模.

左 π-凝聚环一般不是右 π-凝聚环，但有以下结果：

命题 5.2.9 设 Λ 是左和右凝聚环，则 Λ 是左 π-凝聚环当且仅当 Λ 是右 π-凝聚环.

证明 若 Λ 是左 π-凝聚环，令 A 为 f.g. 半自反右 Λ-模，则由命题 5.2.8(iii)的证明知，存在 f.g. 自由右 Λ-模 F，使得 $0\to A\to F$ 正合. 因 Λ 是右凝聚环，故 A 为 f.p. 的. 所以 Λ 是右 π-凝聚环. 同理，若 Λ 是右 π-凝聚环，则可推得 Λ 是左 π-凝聚环.

5.3 π-凝聚环上的模

由 5.2 节已知，π-凝聚环是凝聚环，且 π-凝聚环上 f.g. 半自反模是 f.p. 的. 因此，凝聚环和凝聚环上 f.p. 模的性质，对于 π-凝聚环和 π-凝聚环上 f.g. 半自反模也是成立的. 本节，进一步研究它们的同调

性质.

命题 5.3.1 设 Λ 是交换 π-凝聚环，若 A 和 B 是 f.g. 半自反 Λ-模，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ 也是 f.g. 半自反的.

证明 因 A 是 f.g. 半自反 Λ-模，Λ 是 π-凝聚环，故由定理 5.2.4 知，A 是 f.p. 的. 从而有 Λ-模的正合列 $F_1\to F_0\to A\to 0$，其中 F_1,F_0 皆是 f.g. 自由模. 又由函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$ 得正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(F_0,B)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Hom}_\Lambda(F_1,B).$$

但 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F_0,B)\cong B^{(m)}$，$\mathrm{Hom}_\Lambda(F_1,B)\cong B^{(n)}$，且 B 是 f.g. 半自反模，故由定理 5.1.4(iv)，$B^{(m)}$，$B^{(n)}$ 也是 f.g. 半自反的. 因此，$B^{(n)}$ 的 f.g. 子模 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 f.g. 半自反的. 而 Λ 是 π-凝聚环，于是 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 f.p. 的. 考虑正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F_0,B)\to \mathrm{Im}\varphi\to 0,$$

其中 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F_0,B)$，$\mathrm{Im}\varphi$ 是 f.g. 的，由定理 1.3.1 知，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ 也是 f.g. 的. 但 $\mathrm{Hom}_\Lambda(F_0,B)$ 是半自反的，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ 为它的子模，故 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ 是 f.g. 半自反的.

命题 5.3.2 设 Λ 是交换 π-凝聚环，若 A 和 B 是 f.g. 半自反 Λ-模，则 $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)$ 和 $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A,B)$ 是 f.g. 的.

证明 因 A 是 f.g. 半自反 Λ-模，Λ 是 π-凝聚环，故必有 Λ 模的正合列

$$\cdots\longrightarrow F_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}F_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0,$$

其中每个 F_i 是 f.g. 自由模，$\forall\, i$. 于是得复形

$$\cdots\longrightarrow F_{n-1}\otimes_\Lambda B\xrightarrow{d_{n-1}\otimes 1_B}F_n\otimes_\Lambda B\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\otimes_\Lambda B$$
$$\xrightarrow{d_1\otimes 1_B}F_0\otimes_\Lambda B\longrightarrow 0.$$

$$\therefore\quad \mathrm{Tor}^\Lambda_n(A,B)=\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1_B)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1_B),n>0.$$

因 $F_i\otimes_\Lambda B\cong \Lambda^{(m)}\otimes_\Lambda B\cong(\Lambda\otimes_\Lambda B)^{(m)}\cong B^{(m)}$，且 B 为 f.g. 半自反的，故 $B^{(m)}$ 也是 f.g. 半自反的，亦即 $F_i\otimes_\Lambda B$ 是 f.g. 半自反 Λ-模. 但 Λ 是 π-凝聚环，故 $F_i\otimes_\Lambda B$ 是 f.p. 的，$\forall\, i\geqslant 0$. 考虑正合列

$$0\to \mathrm{Ker}(d_n\otimes 1_B)\to F_n\otimes_\Lambda B\to \mathrm{Im}(d_n\otimes 1_B)\to 0. \tag{1}$$

因 $\mathrm{Im}(d_n\otimes 1_B)$是 f. g. 的，并且，它是半自反模 $F_{n-1}\otimes_\Lambda B$ 的子模，故 $\mathrm{Im}(d_n\otimes 1_B)$为 f. g. 半自反 Λ-模．而 Λ 是 π-凝聚环，由定理 5. 2. 4 知，$\mathrm{Im}(d_n\otimes 1_B)$是 f. p. 的．因正合列(1)中的 $F_n\otimes_\Lambda B$ 和 $\mathrm{Im}(d_n\otimes 1_B)$皆是 f. p. 的，故由定理 1. 3. 1，$\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1_B)$是 f. g. 的．所以 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)$也是 f. g. 的.

当 $n=0$ 时，$\mathrm{Tor}_0^\Lambda(A,B)=A\otimes_\Lambda B$ 是 f. g. 的.

类似地，可以推得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)$是 f. g. 的.

定理 5. 3. 3　设 Λ 是左 π-凝聚环，A 是 f. g. 半自反左 Λ-模，$n(\geqslant -1)$是整数．则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0,\forall$ f. g. 半自反左 Λ-模 B.

证明　(i)⇒(ii)　成立是显然的.

(ii)⇒(i)　对 n 作数学归纳法.

若 $n=-1$，由(ii)得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)=0$，这里 B 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模，所以 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)=0$．于是得 $A=0$．所以$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=-1$.

若 $n=0$，首先，由定理 5. 2. 4 知，A 是 f. p. 的．于是得 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0,\tag{2}$$

其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 f. g. 半自反左 Λ-模．因此由(ii)又得正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,K)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,F)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)\to 0.$$

因此序列(2)是分裂正合的．故 $F\cong A\oplus K$．从而 A 是投射模．所以 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=0$.

若 $n\geqslant 1$，首先，有 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 f. g. 半自反模．于是又有正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(K,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,B).$$

因 F 是自由模，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)=\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,B)=0$，这里 B 是 f. g. 半自反模.

$$\therefore\quad \mathrm{Ext}_\Lambda^n(K,B)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0.$$

由归纳法假设知，$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda K\leqslant n-1$．所以 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A\leqslant n$.

本节开始已指出，凝聚环上 f. p. 模的性质，对于左 π-凝聚环 Λ 上 f. g. 半自反左 Λ-模 A 也成立. 因而，由命题 2. 5. 4 知，$\mathrm{l.fd}_\Lambda A = \mathrm{l.pd}_\Lambda A$. 于是当 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A \leqslant n$ 时，必有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A)=0$，$\forall$ f. g. 半自反右 Λ-模 B. 现在，我们给出其逆成立的一个条件. 为此，先要刻划每个 f. p. 模皆是半自反的环，这个问题是由 S. Jain 解决的(见文献[47]).

命题 5. 3. 4 设 Λ 是环，$F_0 \to F_1 \to A \to 0$ 是右 Λ-模的正合列，其中 F_0 和 F_1 是 f. g. 投射模，$B=\mathrm{Coker}(F_1^* \to F_0^*)$，则存在左 Λ-模的正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,\Lambda) \to A \to A^{**} \to \mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,\Lambda) \to 0.$$

证明见文献[3].

定理 5. 3. 5 环 Λ 是左自 FP-内射当且仅当每个 f. p. 右 Λ-模是半自反的.

证明 设 A 是 f. p. 右 Λ-模，于是得正合列 $F_0 \to F_1 \to A \to 0$，其中 F_0, F_1 是 f. g. 投射模. 由命题 5. 3. 4 知，存在右 Λ-模的正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,\Lambda) \to A \to A^{**} \to \mathrm{Ext}_\Lambda^2(B,\Lambda) \to 0,$$

这里 $B=\mathrm{Coker}(F_1^* \to F_0^*)$. 若 Λ 是左自 FP-内射，因 $B = F_0^*/\mathrm{Im}(F_1^* \to F_0^*)$ 是 f. p. 左 Λ-模，故得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,\Lambda)=0$. 所以 $A \to A^{**}$ 是单同态. 因此 A 是半自反的.

反过来，设 A 是任意 f. p. 左 Λ-模，于是得正合列 $F_0 \xrightarrow{f} F_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$，其中 F_0, F_1 是 f. g. 自由模. 因而，又有右 Λ-模的正合列

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow F_1^* \xrightarrow{f^*} F_0^* \longrightarrow B \longrightarrow 0, \tag{3}$$

这里 $B=\mathrm{Coker}f^*$. 因 F_0^* 和 F_1^* 是 f. g. 投射右 Λ-模，对(3)的右半部应用命题 5. 3. 4，得右 Λ-模的正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(C,\Lambda) \to B \to B^{**} \to \mathrm{Ext}_\Lambda^2(C,\Lambda) \to 0, \tag{4}$$

这里 $C=\mathrm{Coker}f^{**}$，且 $A \cong C$. 又因 B 是 f. p. 右 Λ-模，故由题设知 B 为半自反模. 因此故(4)中 $B \to B^{**}$ 是单同态. 于是得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda)=0$. 所以 Λ 是左 FP-内射.

推论 5. 3. 6 设 Λ 是左 π-凝聚、左自 FP-内射，A 是任意f. g. 半自反左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A)=0$，$\forall$ f.g. 半自反右 Λ-模 B.

证明 我们仅需证(ii)⇒(i). 因 Λ 是左自 FP-内射，故对任意 f.g. 右理想，由定理 5.3.5 知，Λ/I 是 f.g. 半自反右 Λ-模. 又由(ii)可得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/I,A)=0$. 由于左 π-凝聚环 Λ 必是左凝聚环，因此根据定理 4.1.6，就得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$.

最后，我们讨论弱整体维数有限的 π-凝聚环.

引理 5.3.7 设 Λ 是环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n(n\geqslant 2)$是整数，则

(i) $\mathrm{r.fd}_\Lambda(A^*)\leqslant n-2$，$\forall$ f.p. 左 Λ-模 A；

(ii) $\mathrm{l.fd}_\Lambda(B^*)\leqslant n-2$，$\forall$ f.p. 右 Λ-模 B.

证明 因为 A 是 f.p. 左 Λ-模，所以有左 Λ-模的正合列 $F_1\xrightarrow{g}F_0\longrightarrow A\longrightarrow 0$，其中 F_0，F_1 是 f.g. 自由模. 因而又得右 Λ-模的正合列

$$0\longrightarrow A^*\longrightarrow F_0^*\xrightarrow{g^*}F_1^*\longrightarrow C\longrightarrow 0,$$

这里 $C=\mathrm{Coker}g^*$. 因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$，故即得 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(A^*)\leqslant n-2$.

同理，可以证明结论(ii)也成立.

定理 5.3.8 设 Λ 是右 π-凝聚环，$n(\geqslant 2)$是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$；

(ii) 每个 f.g. 半自反右 Λ-模的对偶模的平坦维数$\leqslant n-2$.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是 f.g. 半自反右 Λ-模. 因为 Λ 是右 π-凝聚环，所以由定理 5.2.4 知，A 是 f.p. 的. 于是由引理 5.3.7，得 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(A^*)\leqslant n-2$.

(ii)⇒(i) 设 A 是 f.p. 左 Λ-模，于是有左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 因而，又得正合列 $0\longrightarrow B\longrightarrow F'\xrightarrow{g}K\longrightarrow 0$，其中 F' 是 f.g. 自由左 Λ-模. 继而由命题 5.2.3 知，有右 Λ-模的正合列 $0\to K^*\to(F')^*\to C\to 0$，其中 $C=\mathrm{Coker}g^*$ 是 f.g. 半自反右 Λ-模，$B\cong C^*$. 再应用(ii)就得 $\mathrm{l.fd}_\Lambda B\leqslant n-2$. 但是，序列

$$0\to B\to F'\to F\to A\to 0$$

正合，因此 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A\leqslant n$. 所以由定理 2.3.2，得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$.

推论 5.3.9 设 Λ 是右 π-凝聚、左凝聚环，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 2$ 当且仅当每个 f.g. 半自反右 Λ-模的对偶模是投射模.

证明 设 A 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模. 因 Λ 是右 π-凝聚环，故 A 是 f.p. 右 Λ-模. 但 Λ 是左凝聚环，所以每个 f.p. 右 Λ-模的对偶模也是 f.p. 的. 故 A^* 是 f.p. 左 Λ-模. 于是得 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(A^*)=\mathrm{l.pd}_\Lambda(A^*)$. 再由定理 5.3.8 得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 2\Leftrightarrow A^*\text{是投射模}, \forall\ \text{f.g. 半自反右 }\Lambda\text{-模 }A.$$

推论 5.3.10 设 Λ 是左、右 Noether 环，则 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant 2$ 当且仅当每个 f.g. 半自反右 Λ-模的对偶模是投射模.

证明 由定理 3.2.2 和推论 5.3.9 便知结论成立.

5.4 FGT-投射维数

本节将引进环的 FGT-投射维数，应用这类维数来进一步刻划 π-凝聚环的性质和分类.

定义 设 Λ 是环，P 是左 Λ-模. 若对任意 f.g. 半自反左 Λ-模 B，皆有 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,B)=0$，则称 P 为左 FGT-投射模.

命题 5.4.1 左 Λ-模 P 是 FGT-投射模 $\Leftrightarrow$ 每个左 Λ-模正合列 $0\to K\to F\to P\to 0$是分裂的，其中 K 是 f.g. 半自反的.

证明 若 P 是 FGT-投射模，且 $0\to K\to F\to P\to 0$ 是任意左 Λ-模的正合列，其中 K 是 f.g. 半自反的，则得正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,K)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,F)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,P)\to \mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K).$$

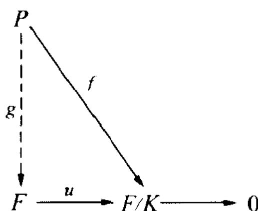
因 P 是 FGT-投射模，K 是 f.g. 半自反模，故由定义得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)=0$. 所以正合列 $0\to K\to F\to P\to 0$ 分裂.

反过来，设 K 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，于是存在 P 经 K 的一个扩张 $0\to K\to F\to P\to 0$. 由题设知这个扩张是分裂的，且 P 经 K 的所有扩张都是分裂的. 于是所有 P 经 K 的扩张是等价的. 因此 P 经 K 的扩张的全体 $E(P,K)$只有一个元素. 但集合 $E(P,K)$与 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)$间存在一个双射，于是得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)=0$. 所以 P 是 FGT-投射模.

命题 5.4.2 $\bigoplus_{\alpha\in I}P_\alpha$ 是 FGT-投射模当且仅当每个 P_α 是 FGT-投射模.

证明 由 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\bigoplus_{\alpha\in I}P_\alpha,A)\cong\prod_{\alpha\in I}\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P_\alpha,A)$便知结论成立.

命题 5.4.3 设 Λ 是右 π-凝聚左自内射环，则左 Λ-模 P 是 FGT-投射模当且仅当对 $\mathscr{C}_\Lambda^L$ 内如右的任意图，必存在 Λ-同态 $g:P\to F$，使该图交换，即 $f=ug$，其中 F 为 f.g. 自由 Λ-模，K 是 F 的 f.g. 子模.



证明 若 P 是 FGT-投射模，因 K 是 f.g. 半自反模，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)=0$. 因而，由正合列 $0\to K\to F\to F/K\to 0$，得正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,K)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F/K)\to 0.$$

于是存在 $g\in\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F)$，使得上图是交换的.

反过来，设 K 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故 K 必为一个 f.g. 自由模 F 的子模. 由正合列 $0\to K\to F\to F/K\to 0$，得正合列

$$\begin{aligned}0&\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,K)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F)\\&\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F/K)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)\to 0.\end{aligned}$$

因 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P,F/K)$是满同态，故得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(P,K)=0$. 所以 P 是 FGT-投射模.

命题 5.4.4 设 P 是 f.p. 左 Λ-模，则 P 是投射模当且仅当 P 是 FGT-投射模.

证明 投射模显然是 FGT-投射的. 反过来，若 P 是 FGT-投射模，因 P 是 f.p. 的，则存在左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to P\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 由命题 5.4.1，得 $F\cong K\oplus P$. 所以 P 是投射模.

推论 5.4.5 (i)设 Λ 是左 π-凝聚环，则每个 f.g. 半自反左 Λ-模是投射模当且仅当它是 FGT-投射模.

(ii)任意环 Λ 是左半遗传的当且仅当它是左凝聚环，并且，每个 f.g. 左理想是 FGT-投射模.

证明 若 Λ 是左 π-凝聚环，P 是任意 f.g. 半自反模，则由定理 5.2.4 知，P 是 f.p. 的. 因而，由命题 5.4.4 知，P 是投射模当且仅当它是 FGT-投射模.

现在证明第二部分. 若 Λ 是左半遗传环，则由定义知 Λ 的每个 f.g. 左理想是投射模. 因而也是 FGT-投射模. 又根据定理 2.3.17，Λ 是左凝聚环. 反过来，若 Λ 是左凝聚环，I 是它的任意 f.g. 左理想，则 I 是 f.p. 的. 于是 Λ 的每个 f.g. 左理想为 f.p. 左 FGT-投射模. 又由命题 5.4.4 知，I 也是投射模. 所以 Λ 是左半遗传环.

定义 设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模. 记

$\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A=\mathrm{Inf}\{n\mid \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0,\forall$ f.g. 半自反左 Λ-模 $B\}$，
并把它称为模 A 的左 FGT-投射维数.

又记

$$\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A\mid\forall\ A\in\mathscr{C}_\Lambda^L\},$$

并把它称为环 Λ 的左 FGT-投射维数. 如果这样的数不存在，规定 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=\infty$.

命题 5.4.6 设 Λ 是左 π-凝聚环，A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，则

$$\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A.$$

证明 若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=n$，则显然有 $\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A\leqslant n$.
反过来，若 $\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A=m$，则由定义得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{m+1}(A,B)=0,\ \forall\ \text{f.g. 半自反左 }\Lambda\text{-模 }B.$$

又根据定理 5.3.3，有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant m$. 所以 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A$.

推论 5.4.7 设 Λ 是左 π-凝聚环，A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.FGT\text{-}pd}_\Lambda A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0,\forall$ f.g. 半自反左 Λ-模 B；

(iv) 若 $0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to A\to 0$ 正合，且 $P_i(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 是 f.g. 半自反 FGT-投射模，则 P_n 也是 FGT 投射模.

证明 由定理 5.2.4、定理 5.3.3 便知结论成立.

下面，我们讨论环的 FGT-投射维数.

定义 设 Λ 是环，如果在 Λ 中每个右(和左)零化子理想是由一个幂等元生成，则称 Λ 为 Baer 环.

事实上，对于任意环 Λ，每个右零化子理想是由一个幂等元生成当且仅当每个左零化子理想是由一个幂等元生成.

一个左自内射、VN 正则环是 Baer 环.

定理 5.4.8 设 Λ 是环，则 l. FGT-P. $\dim\Lambda=0$ 当且仅当 Λ 是左自内射、VN 正则环.

证明 若 l. FGT-P. $\dim\Lambda=0$，则每个 f. g. 半自反左 Λ-模是内射模. 故 Λ 是左自内射的. 设 I 是 Λ 的任意 f. g. 左理想，则 I 为 f. g. 半自反左理想. 所以 I 是内射模. 于是正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$ 是分裂的，$\Lambda\cong I\oplus\Lambda/I$. 因此 Λ/I 是投射模. 又由定理 2. 3. 2，得 W. gl. $\dim\Lambda=0$. 于是再应用定理 2. 3. 14，便知 Λ 是 VN 正则环.

反过来，首先证明 Λ 是右 π-凝聚环. 令 A 是 f. g. 左 Λ-模，它的极小生成集所含元素个数为 n. 若 $n=1$，则存在一个左理想 I，使得 $A\cong\Lambda/I$. 于是 $A^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/I,\Lambda)=r(I)$. 因 Λ 是左自内射、VN 正则环，故 Λ 是 Baer 环. 于是右零化子理想 $r(I)$是 f. g. 的. 从而 A^* 是f. g. 的. 现在，设 A_1 是 A 的子模，它的极小生成集所含元素个数小于 n，并且，有如下的正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A/A_1,\Lambda)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$$
$$\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A_1,\Lambda)\to\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/A_1,\Lambda).$$

因为 Λ 是左自内射，所以 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/A_1,\Lambda)=0$. 由归纳法假设，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A/A_1,\Lambda)$和 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A_1,\Lambda)$都是 f. g. 的，因而 $A^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$ 也是 f. g. 的. 于是再由定理 5. 2. 1 便知 Λ 是右 π-凝聚环.

其次，证明每个 f. g. 半自反左 Λ-模是投射模. 因 Λ 是 VN 正则环，故由定理 1. 4. 15 知，Λ 是左半遗传环. 但 Λ 是右 π-凝聚环，每个 f. g. 半自反左 Λ-模是自由模的子模，故根据定理 1. 4. 2，f. g. 半自反左 Λ-模是投射模. 又因 Λ 是左自内射的，故得 l. FGT-P. $\dim\Lambda=0$.

由定理 5. 4. 8 知，用环的 FGT-投射维数可以度量这个环与自内射、VN 正则环的差距.

定理 5. 4. 9 设 Λ 是左 π-凝聚环，则 l. FGT-P. $\dim\Lambda=n<\infty$ 当且

仅当 f.g. 自由左 Λ-模的闭子模的内射维数$\leqslant n$，并且 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=n$.

证明 若 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=n$，则由定义知存在一个 f.g. 半自反左 Λ-模 A，使得 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A=n$. 因 Λ 是左 π-凝聚环，根据定理 5.2.4 知，A 是 f.p. 的. 于是存在左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 令 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=m$，由定理 2.1.3′，便得 $\mathrm{l.Id}_\Lambda F=m$. 若 $\mathrm{l.Id}_\Lambda A>m$，则由定理 2.1.2′，可得 $\mathrm{l.Id}_\Lambda K=\mathrm{l.Id}_\Lambda A+1=n+1$. 这与 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=n$ 相矛盾，所以 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=n$. 至于 f.g. 自由左 Λ-模的闭子模的内射维数$\leqslant n$，这个结论是容易推得的.

反过来，设 A 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故 A 是 f.p. 的. 于是存在左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 又因 A 是半自反的，故由命题 5.1.10 知，K 是 f.g. 自由模 F 的闭子模. 于是得 $\mathrm{l.Id}_\Lambda K\leqslant n$. 再因为 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=n$，所以 $\mathrm{l.Id}_\Lambda F=n$. 又由定理 2.1.2′即知，$\mathrm{l.Id}_\Lambda A\leqslant n$. 所以 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=n$.

推论 5.4.10 设 Λ 是左 π-凝聚环，则 Λ 必属于下面五类环中的一种，且只能属于其中的一种：

(i) Λ 是左、右 π-凝聚环且是左自内射、VN 正则环；

(ii) $0<\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda<\infty$，且任意 f.g. 自由左 Λ-模的闭子模的内射维数$\leqslant\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda$；

(iii) Λ 是左自内射，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\infty$；

(iv) Λ 是左、右 π 凝聚环，且是 VN 正则的，$\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=\infty$；

(v) Λ 不是 VN 正则环，也不是自内射的，且至少存在一个 f.g. 半自反左 Λ-模，它的内射维数为∞.

证明 若 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=0$，则由定理 5.4.8 就得到(i).

若 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=n$，$0<n<\infty$，则由定理 5.4.9 就得到(ii).

我们仅需讨论 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda=\infty$. 由定理 5.4.8 知，$\Lambda$ 不是左自内射、VN 正则环. 如果 Λ 是左自内射的，但不是 VN 正则环，因 Λ 是左 GQF-环，且 Λ 不是 VN 正则环，故由定理 2.5.19，得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\infty$. 另一方面，若 $0<\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda<\infty$，则由定理 5.4.9，得 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=n$. 这与 Λ 是左自内射相矛盾，因此

l. FGT-P. $\dim\Lambda=\infty$. 这就得到(iii).

类似地，如果 Λ 是左 π-凝聚、VN 正则环，但不是左自内射的，那么根据定理 1.4.15，Λ 是左、右半遗传环. 因此 Λ 也是右 π-凝聚环. 设 A 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模，由定理 5.4.8 的证明可知，A 是投射模. 所以 l. $\mathrm{Id}_\Lambda A\leqslant$ l. $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda$. 但 l. FGT-P. $\dim\Lambda=\infty$，于是得 l. $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=\infty$. 反过来，因 l. $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=\infty$，故 l. FGT-P. $\dim\Lambda=\infty$. 这样就得到了(iv).

最后，(v)成立是显然的.

5.5 FGT-内射维数

FGT-内射维数是 FGT-投射维数的对偶概念，本节先介绍 FGT-内射模和模的 FGT-内射维数，然后讨论环的 FGT-内射维数.

定义 设 Λ 是环，E 是左 Λ-模，若对任意 f. g. 半自反左 Λ-模 B，皆有 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,E)=0$，则称 E 为左 FGT-内射模.

设 Λ 是左 π-凝聚环，则每个 f. g. 半自反左 Λ-模是 f. p. 的. 因此左 π-凝聚环上的 FP-内射模一定是左 FGT-内射模. 若 Λ 是左 π-凝聚、右 GQF-环，则左 FGT-内射模与 FP-内射模是一致的. 因此 π-凝聚环上 FGT-内射模与凝聚环上 FP-内射模间有着密切联系.

定义 设 Λ 是环，若对任意右理想 I 和左理想 L，皆有 $rl(I)=I$，$lr(L)=L$，则称 Λ 为 D-环.

命题 5.5.1 (i) 设 Λ 是左 π-凝聚环，若每个左 FGT-内射模是内射模，则 Λ 是左 Noether 环；

(ii) 设 Λ 是 D-环，则 FGT-内射模与内射模是一致的.

证明 (i) 设 $\{E_\alpha\mid E_\alpha$ 是内射左 Λ-模，$\alpha\in I\}$，A 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模. 由命题 2.5.2 知，$\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是 FP-内射模. 又因 Λ 是左 π-凝聚环，故 A 是 f. p. 的. 于是 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha)=0$. 故$\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是 FGT-内射模. 又由题设它也是内射模，应用定理 1.1.5，可知 Λ 是左 Noether 环.

(ii) 设 I 是 Λ 的任意左理想，因 Λ 是 D-环，故 Λ/I 是 f. g. 半自反

左 Λ-模. 若 E 是任意左 FGT－内射模，则由定义可得 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/I, E)=0$. 所以 E 是内射模.

命题 5.5.2 设 Λ 是环，E 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) E 是 FGT-内射模；

(ii) 若 B 是 f.g. 半自反左 Λ-模，则任意正合列 $0\to E\to A\to B\to 0$ 是分裂的；

(iii) 若 K 是 f.g. 自由左 Λ-模 F 的闭子模，则 K 到 E 的每个左 Λ-同态，均可扩张成 F 到 E 的左 Λ-同态.

证明 (i)⇒(ii) 若 E 是 FGT-内射模，因 B 是 f.g. 半自反模，故 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,E)=0$. 于是由正合列 $0\to E\to A\to B\to 0$ 得正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,E)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,E)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(E,E)\to 0.$$

因此 $0\to E\to A\to B\to 0$ 是分裂正合的.

(ii)⇒(i) 设 B 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因此，B 经 E 扩张为 $0\to E\to A\to B\to 0$. 由题设知这个序列是分裂正合的. 应用命题 5.4.1 的证明，得 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,E)=0$. 故 E 是 FGT-内射模.

(i)⇔(iii) 可以由定义直接验证知结论成立.

命题 5.5.3 设 Λ 是左 π-凝聚环，则下列结论成立：

(i) $\varinjlim \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B_i)\cong \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,\varinjlim B_i)$，这里 $n\geqslant 1$，A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，$\{B_i \mid i\in I\}$是左 Λ-模的正向系；

(ii) 左 FGT-内射模的正向极限是 FGT-内射模；

(iii) $\bigoplus_{i\in I}E_i$ 是左 FGT-内射⇔每个 E_i 是左 FGT-内射，$\forall\, i\in I$.

证明 (i) 对 n 作数学归纳法. 若 $n=1$，因 Λ 是左 π-凝聚环，故 f.g. 半自反左 Λ-模 A 是 f.p. 的. 于是存在左 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to A\to 0, \tag{1}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 F 的 f.g. 子模. 但左 π-凝聚环也是左凝聚环，因此 K 是 f.p. 的. 由(1)得正合列

$$\begin{aligned}0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\varinjlim B_i)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F,\varinjlim B_i)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,\varinjlim B_i)\\ \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\varinjlim B_i)\to 0\end{aligned} \tag{2}$$

和正合列

$$0 \to \varinjlim \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B_i) \to \varinjlim \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B_i) \to \varinjlim \mathrm{Hom}_\Lambda(K, B_i) \to \varinjlim \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B_i) \to 0. \quad (3)$$

因 A，F 和 K 都是 f. p. 的，故(2)和(3)中前三项是同构的. 于是

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, \varinjlim B_i) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B_i).$$

一般地，由(1)得正合列

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(F, \varinjlim B_i) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(K, \varinjlim B_i) \to \mathrm{Ex}^n_\Lambda(A, \varinjlim B_i) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(F, \varinjlim B_i).$$

但 $$\mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(F, \varinjlim B_i) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(F, \varinjlim B_i) = 0,$$

于是

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(K, \varinjlim B_i) \cong \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, \varinjlim B_i).$$

由归纳法假设，得

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(K, \varinjlim B_i) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(K, B_i) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B_i).$$

所以 $$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, \varinjlim B_i) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B_i).$$

(i)⇒(ii)⇒(iii) 显然是成立的.

另外，对于任意环，显然有 $\prod_{i \in I} E_i$ 是 FGT-内射的⇔每个 E_i 是 FGT-内射的.

定义 设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模. 记

$$\text{l. FGT-Id}_\Lambda A = \mathrm{Inf}\{n \mid \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(B, A) = 0, \forall \text{ f. g. 半自反左 } \Lambda\text{-模 } B\},$$

并把它称为模 A 的左 FGT-内射维数. 又记

$$\text{l. FGT-I. dim}\Lambda = \sup\{\text{l. FGT-Id}_\Lambda A \mid \forall A \in \mathscr{C}^L_\Lambda\},$$

并把它称为环 Λ 的左 FGT-内射维数. 如果这样的数不存在，那么规定l. FGT-I. dim$\Lambda = \infty$.

命题 5.5.4 设 Λ 是左 π-凝聚环，A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) l. FGT-Id$_\Lambda A \leqslant n$;

(ii) $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(B, A) = 0, \forall$ f. g. 半自反左 Λ-模 B;

(iii) 若 $0 \to A \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ 正合，其中每个 E_i 是 FGT-内射模，$0 \leqslant i \leqslant n-1$，则 E_n 是 FGT-内射模.

证明 (i)⇒(ii) 若 B 是 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左 π-凝聚环，故 B 是 f.p. 的. 于是存在左 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to B\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 仿照命题 2.5.9(i)⇒(ii)的证明，便知(i)⇒(ii)成立.

(ii)⇒(iii)⇒(i) 仿照命题 2.5.9(ii)⇒(iv)⇒(i)的证明，便知结论成立.

命题 5.5.5 设 Λ 是左 π-凝聚环，$0\to A\to B\to C\to 0$ 是左 Λ-模正合列，若 A,B 和 C 中任意两个模的 FGT-内射维数有限，则第三个模的 FGT-内射维数也有限，并且

(i) $\text{l.FGT-Id}_\Lambda B\leqslant\sup\{\text{l.FGT-Id}_\Lambda A,\ \text{l.FGT-Id}_\Lambda C\}$；

(ii) $\text{l.FGT-Id}_\Lambda A\leqslant\sup\{\text{l.FGT-Id}_\Lambda B,\ \text{l.FGT-Id}_\Lambda C+1\}$；

(iii) $\text{l.FGT-Id}_\Lambda C\leqslant\sup\{\text{l.FGT-Id}_\Lambda B,\ \text{l.FGT-Id}_\Lambda A-1\}$.

证明 设 K 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，于是得左 Λ-模的长正合列

$$\cdots\to\text{Ext}_\Lambda^n(K,A)\to\text{Ext}_\Lambda^n(K,B)\to\text{Ext}_\Lambda^n(K,C)\to\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,A)\to\cdots. \tag{4}$$

由命题 5.5.4 知，若 A,B 和 C 中有两个模的 FGT-内射维数有限，则第三个也是有限的.

(i) 令 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda B=n$，如果 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda C\leqslant n-1$，由(4)得正合列

$$\text{Ext}_\Lambda^n(K,A)\to\text{Ext}_\Lambda^n(K,B)\to\text{Ext}_\Lambda^n(K,C)\to\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,A)\to\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,B).$$

由命题 5.5.4 知，$\text{Ext}_\Lambda^n(K,C)=\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,B)=0$. 因此 $\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,A)=0$. 故 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda A\leqslant n$. 若 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda A<n$，则 $\text{Ext}_\Lambda^n(K,A)=0$. 于是得 $\text{Ext}_\Lambda^n(K,B)=0$. 故 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda B<n$. 这与假设相矛盾，因此，$\text{l.FGT-Id}_\Lambda A=n$. 所以(i)式成立. 如果，$\text{l.FGT-Id}_\Lambda C\geqslant n$，显然(i)式仍成立.

同理，可以证明(ii)和(iii)也成立.

推论 5.5.6 设 Λ 是左 π-凝聚环，$0\to A\to B\to C\to 0$ 是左 Λ-模正合列，且 B 是 FGT-内射. 若 A 是 FGT-内射，则 C 也是 FGT-内射；若 A 不是 FGT-内射，且 $\text{l.FGT-Id}_\Lambda A<\infty$，则

$$\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda A = \mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda C + 1.$$

下面，我们讨论环的 FGT-内射维数.

定理 5.5.7 设 Λ 是任意环，则 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=0 \Leftrightarrow \Lambda$ 是右 π-凝聚、左半遗传环 $\Leftrightarrow \Lambda$ 是左 π-凝聚、右半遗传环.

证明 若 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=0$，则每个 f.g. 半自反左 Λ-模是投射模. 又因投射模的 f.g. 子模是半自反的，故投射左 Λ-模的 f.g. 子模是投射模. 所以 Λ 是左半遗传环. 另外，设 A 是 f.g. 半自反右 Λ-模，于是有 Λ-模的正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模. 由命题 5.2.3，得 $K\cong B^*$，$B=\mathrm{Coker}(f^*)$ 是 f.g. 半自反左 Λ-模. 因而 B 是 f.g. 投射模. 从而 B^* 是f.g. 投射右 Λ-模. 所以 $K\cong B^*$ 是 f.g. 的. 因此，f.g. 半自反右 Λ-模 A 是 f.p. 的. 最后由定理 5.2.4 即知 Λ 是右 π-凝聚环.

反过来，设 A 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故有左 Λ-模的正合列 $0\to A\to F$，其中 F 是 f.g. 自由模. 但 Λ 又是左半遗传环，故 A 是投射模. 于是得 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=0$.

同样，可以证明 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=0 \Leftrightarrow \Lambda$ 是左 π-凝聚、右半遗传环.

由定理 5.5.7 知，用环的 FGT-内射维数可以测量一个环与右(左)π-凝聚、左(右)半遗传环的差距.

定理 5.5.8 设 Λ 是左 π-凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=n<\infty$；

(ii) $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda\Lambda=n<\infty$，并且，f.g. 自由左 Λ-模的闭子模的投射维数不大于 $n-1$.

证明 (i)⇒(ii) 由(i)知，存在一个 f.g. 半自反左 Λ-模 A，使得 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A=n$. 再因 Λ 是左 π-凝聚环，故 A 是 f.p. 的，且 Λ 是左凝聚环. 于是由推论 2.5.17 知，$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda)\neq 0$. 根据命题 5.5.4，就得 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda\Lambda\geqslant n$. 但 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=n$，所以 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda\Lambda=n$. 其次，设 K 是 f.g. 自由左 Λ-模 F 的闭子模，则 F/K 是 f.g. 半自反模. 因 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda=n$，故 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(F/K)\leqslant n$. 于是由正合列 $0\to K\to F\to$

$F/K \to 0$，得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda K \leqslant n-1$.

(ii)⇒(i) 由 l. FGT-$\mathrm{Id}_\Lambda \Lambda = n$ 知，l. FGT-I. $\dim\Lambda \geqslant n$. 另外，设 A 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左 π-凝聚环，故 A 是 f. p. 的. 因而存在左 Λ-模的正合列 $0 \to K \to F \to A \to 0$，其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 F 的 f. g. 闭子模. 再由(ii)便得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda K \leqslant n-1$. 因而 l. $\mathrm{pd}_\Lambda A \leqslant n$. 于是 l. FGT-I. $\dim\Lambda = n$.

定理 5.5.9 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，$n \geqslant 1$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) l. FGT-I. $\dim\Lambda \leqslant n$；

(ii) 每个 f. g. 半自反右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n-1$.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意 f. g. 半自反右 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故由定理 5.2.4 知，A 是 f. p. 的. 于是有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0, \tag{5}$$

其中 F_0 是 f. g. 自由模，K 是 f. g. 半自反模. 继而由(5)又得正合列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{g^*} F_0^* \longrightarrow \mathrm{Coker}g^* \longrightarrow 0. \tag{6}$$

根据命题 5.2.3，可得 $K \cong (\mathrm{Coker}g^*)^*$，$\mathrm{Coker}g^*$ 是 f. g. 半自反左 Λ-模. 于是由(i)知 l. $\mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{Coker}g^*) \leqslant n$. 再由(6)便得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda(A^*) \leqslant n-1$.

(ii)⇒(i) 设 B 是 f. g. 半自反左 Λ-模，仅需证 l. $\mathrm{pd}_\Lambda B \leqslant n$. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故 B 是 f. p. 的. 于是有正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$，其中 F_0 是 f. g. 自由模，K 是 f. g. 半自反模. 又由命题 5. 2. 3 知，$K \cong (\mathrm{Coker}g^*)^*$，$\mathrm{Coker}g^*$ 是 f. g. 半自反右 Λ-模. 再由(ii)知 l. $\mathrm{pd}_\Lambda K \leqslant n-1$. 故 l. $\mathrm{pd}_\Lambda B \leqslant n$. 于是得 l. FGT-I. $\dim\Lambda \leqslant n$.

推论 5.5.10 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) l. FGT-I. $\dim\Lambda \leqslant 1$；

(ii) 每个 f. g. 半自反右 Λ-模的对偶模是投射模.

定理 5.5.11 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，则

r. FGT-I. $\dim\Lambda \leqslant$ W. gl. $\dim\Lambda \leqslant$ r. FGT-I. $\dim\Lambda + 1 \leqslant$ r. gl. $\dim\Lambda$,

l. FGT-I. $\dim\Lambda \leqslant$ W. gl. $\dim\Lambda \leqslant$ l. FGT-I. $\dim\Lambda + 1 \leqslant$ l. gl. $\dim\Lambda$.

证明 由定义得

$$\text{r. FGT-I. dim}\Lambda=\sup\{\text{r. pd}_\Lambda A \mid \forall \text{ f. g. 半自反右 } \Lambda\text{-模 } A\}.$$

因 Λ 是右 π-凝聚环，故每个 f.g. 半自反右 Λ-模是 f.p. 的，并且

$$\text{W. gl. dim}\Lambda=\sup\{\text{r. pd}_\Lambda A \mid \forall \text{ f. p. 右 } \Lambda\text{-模 } A\},$$

$$\therefore\quad \text{r. FGT-I. dim}\Lambda\leqslant \text{W. gl. dim}\Lambda.$$

其次，若 r. FGT-I. dim$\Lambda=\infty$，显然有

$$\text{W. gl. dim}\Lambda\leqslant \text{r. FGT-I. dim}\Lambda+1.$$

若 r. FGT－I. dim$\Lambda=n<\infty$，设 A 是 f.p. 右 Λ-模，则得右 Λ-模正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模．因此 r. pd$_\Lambda K\leqslant n$．而 r. pd$_\Lambda A\leqslant n+1$，故 W. gl. dim$\Lambda\leqslant n+1$.

最后，若 r. gl. dim$\Lambda=\infty$，显然有

$$\text{r. FGT-I. dim}\Lambda+1\leqslant \text{r. gl. dim}\Lambda.$$

若 r. gl. dim$\Lambda=n<\infty$，A 是 f.g. 半自反右 Λ-模，因 Λ 是左 π-凝聚环，故存在右 Λ-模正合列 $0\to A\to F\to F/A\to 0$，其中 F 是f.g. 自由模．但 r. gl. dim$\Lambda=n$，因而 r. pd$_\Lambda(F/A)\leqslant n$．于是 r. pd$_\Lambda A\leqslant n$．所以 r. FGT-I. dim$\Lambda+1\leqslant$ r. gl. dimΛ.

类似地，可以证得第二个不等式也成立.

在定理 5.5.11 中，如果 Λ 是左、右 Noether 环，则

$$\begin{aligned}\text{r. FGT－I. dim}\Lambda\leqslant \text{W. gl. dim}\Lambda &=\text{r. FGT-I. dim}\Lambda+1\\ &=\text{r. gl. dim}\Lambda.\end{aligned}$$

推论 5.5.12 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是右 π-凝聚、VN 正则环；

(ii) Λ 是右 π-凝聚、右自 FP-内射，且 r. FGT-I. dim$\Lambda<\infty$；

(iii) Λ 是左 π-凝聚环、左自 FP-内射，且 l. FGT-I. dim$\Lambda<\infty$.

证明 (i)⇒(ii) 因 Λ 是 VN 正则环，故它是左、右凝聚环．由命题 5.2.9 知，Λ 是左、右 π-凝聚环．于是由定理 5.5.11，得

$$\text{r. FGT-I. dim}\Lambda\leqslant \text{W. gl. dim}\Lambda=0.$$

另外，因 Λ 是 VN 正则环，故由定理 2.5.19 知，Λ 是右自 FP-内射.

(ii)⇒(i) 因 Λ 是右 π-凝聚环，由定理 5.5.11 的证明，得

$$\text{W. gl. dim}\Lambda\leqslant \text{r. FGT-I. dim}\Lambda+1<\infty.$$

又因 Λ 是右凝聚、右自 FP-内射，即 Λ 是右 GQF-环，故由定理 2.5.19 知，Λ 是 VN 正则环.

同理可以推得(i)⇔(iii)成立.

下面，给出 FGT-内射维数与 FP-内射维数间的一个关系.

命题 5.5.13 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，n 是任意非负整数，则

(i) 对任意左 Λ-模 A，$\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n+1$；

(ii) $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda \leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{l.\,FP\text{-}I.\,dim}\Lambda \leqslant n+1$.

证明 (i) 若 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n$，$B$ 是任意 f.p. 左 Λ-模，则有左 Λ-模的正合列 $0 \to K \to F \to B \to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 因而又得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(B,A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(F,A).$$

因为 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n$，且 Λ 是左 π-凝聚环，所以由命题 5.5.4 知，$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(K,A)=0$. 又因为 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(F,A)=0$，所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(B,A)=0$. 于是由命题 2.5.9 得 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n+1$.

反过来，若 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n+1$，$B$ 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故有左 Λ-模的正合列 $0 \to B \to F \to F/B \to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，F/B 是 f.p. 的. 因而又得左 Λ-模的正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(F/B,A).$$

由于 Λ 是左凝聚环，且 $\mathrm{l.\,FP\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n+1$，因此根据命题 2.5.9 知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(F/B,A)=0$. 又知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(F,A)=0$，所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(B,A)=0$. 因而由命题 5.5.4，便得 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}Id}_\Lambda A \leqslant n$.

(ii) 直接由(i)知结论是成立的.

最后，应用环的自内射维数给出环的 FGT-内射维数的一个上界.

命题 5.5.14 设 Λ 是左 π-凝聚环，$\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda < \infty$，则

$$\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda \leqslant \mathrm{l.\,Id}_\Lambda \Lambda.$$

证明 令 $\mathrm{l.\,FGT\text{-}I.\,dim}\Lambda = n < \infty$，由推论 5.4.7 知，存在两个 f.g. 半自反左 Λ-模 A 和 B，使得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B) \neq 0$. 因 Λ 是左 π-凝聚环、f.g. 半自反模 B 是 f.p. 的，故有左 Λ-模的正合列 $0 \to K \to F \to B \to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g 半自反模. 从而又得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,F)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,K),$$

其中 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,B)\neq 0$, $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,K)=0$. 所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,F)\neq 0$. 于是 $\mathrm{l.FGT\text{-}I.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda$.

5.6 FGT-平坦维数

这一节里，我们要应用函子 Tor 引入模和环的 FGT-平坦维数，并将有关平坦模和平坦维数的性质进行推广.

定义 设 Λ 是环，U 是右 Λ-模，若对任意 f.g. 半自反左 Λ-模 B，皆有 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U,B)=0$，则称 U 为右 FGT-平坦模.

同理，可定义左 FGT-平坦模.

由定义知，右 Λ-模 U 是 FGT-平坦模当且仅当对任意左 Λ-模正合列 $0\to B\to A$，皆有 $0\to U\otimes_\Lambda B\to U\otimes_\Lambda A$ 正合，其中 A/B 是 f.g. 半自反模.

命题 5.6.1 设 Λ 是环，U 是任意右 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) U 是 FGT-平坦模；

(ii) $U^*=\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z)$ 是左 FGT-内射模，这里 Q 是有理数加法群，Z 是整数环.

(iii) 对任意 f.g. 自由左 Λ-模 F 的闭子模 K，皆有 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U,F/K)=0$.

证明 (i)⇒(ii) 设 K 是 f.g. 自由左 Λ-模 F 的闭子模，若 U 是 FGT-平坦模，则有正合列

$$0\to U\otimes_\Lambda K\to U\otimes_\Lambda F.$$

因 Q/Z 是内射 Z-模，故得交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda F,Q/Z) & \to & \mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda K,Q/Z)\to 0\\ \varphi_F\downarrow & & \downarrow\varphi_K\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(F,\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z)) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(K,\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z))\to 0\end{array}$$

其中行正合，φ_F 和 φ_K 是同构. 因 K 到 U^* 的每个 Λ-同态均可扩张成 F 到 U^* 的 Λ—同态，故由命题 5.5.2 知，$U^*=\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z)$是 FGT-内射模.

(ii)$\Rightarrow$(i) 设 $0\to B\to A$ 是左 Λ-模正合列，且 A/B 是 f.g. 半自反的. 因 $U^*=\mathrm{Hom}_Z(U,Q/Z)$ 是 FGT-内射模，故得正合列

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,U^*)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(B,U^*)\to 0.$$

因而又有正合列

$$\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda A,Q/Z)\to\mathrm{Hom}_Z(U\otimes_\Lambda B,Q/Z)\to 0.$$

因为 Q/Z 是范畴 $\mathscr{C}_Z$ 的内射余生成元，所以由定理 1.1.7，又得正合列 $0\to U\otimes_\Lambda B\to U\otimes_\Lambda A$. 故 U 是 FGT-平坦模.

(i)$\Leftrightarrow$(iii) 直接由定义可推得结论成立.

命题 5.6.2 设 Λ 是右 π-凝聚环，$\{U_\alpha \mid U_\alpha$ 是左 FGT-平坦模，$\alpha\in I\}$，则 $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ 是 FGT-平坦模.

证明 设 A 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故 A 是 f.p. 的. 于是有右 Λ-模正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 从而 K 也是 f.p. 的. 用 B 表示 K，F 或 A，则 B 是 f.p. 右 Λ-模. 于是得

$$B\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\cong\prod_{\alpha\in I}(B\otimes_\Lambda U_\alpha).$$

因 U_α 是左 FGT-平坦模，故 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U_\alpha,A)=0$. 继而得正合列

$$0\to K\otimes_\Lambda U_\alpha\to F\otimes_\Lambda U_\alpha\to A\otimes_\Lambda U_\alpha\to 0.$$

因而又得正合列

$$0\to\prod_{\alpha\in I}(K\otimes_\Lambda U_\alpha)\to\prod_{\alpha\in I}(F\otimes_\Lambda U_\alpha)\to\prod_{\alpha\in I}(A\otimes_\Lambda U_\alpha)\to 0,$$

即序列

$$0\to K\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to F\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to A\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to 0$$

正合. 另一方面又有正合列

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,\prod_{\alpha\in I}U_\alpha)\to K\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to F\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to A\otimes_\Lambda\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\to 0,$$

于是得 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,\prod_{\alpha\in I}U_\alpha)=0$. 所以 $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ 是 FGT-平坦模.

另外，对于任意环，显然有：$\bigoplus_{\alpha\in I}U_\alpha$ 是 FGT-平坦的$\Leftrightarrow$每个 U_α 是 FGT-平坦的.

1.2 节告诉我们，平坦模和纯正合列之间有着深刻联系.现在，我们把这个结果推广到 FGT-平坦模.

定义 设

$$0\to A'\to A\to A''\to 0 \tag{1}$$

是左 Λ-模的正合列，若对任意 f.g. 半自反右 Λ-模 B，序列 $0\to B\otimes_\Lambda A'\to B\otimes_\Lambda A\to B\otimes_\Lambda A''\to 0$ 正合，则称序列(1)为广义纯正合的.

命题 5.6.3 设 Λ 是环，U 是左 Λ 模，则下列陈述是等价的：

(i) U 是 FGT-平坦模；

(ii) 任何短正合列 $0\to A'\to A\to U\to 0$ 是广义纯的；

(iii) 存在一个广义纯正合列 $0\to A'\to A\to U\to 0$，其中 A 是 FGT-平坦模.

证明 仿照命题 1.2.5 的证明，便知结论是成立的.

命题 5.6.4 设环 Λ 是左自 FP-内射，U 是任意左 Λ-模，则 U 是 FGT-平坦模当且仅当 U 是平坦模.

证明 若 U 是平坦模，则显然它也是 FGT-平坦模. 反过来，若 U 是 FGT-平坦模，设 I 是 Λ 的任意 f.g. 右理想，则 Λ/I 是f.p. 右 Λ-模. 因 Λ 是左自 FP-内射，故由命题 5.3.5 知，Λ/I 是f.g. 半自反右 Λ-模. 于是得 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I,U)=0$. 再由定理 2.2.1 便知 U 是平坦模.

定义 设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模，记

$\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A=\mathrm{Inf}\{n\mid \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(B,A)=0,\forall$ f.g. 半自反右 Λ-模 $B\}$，

并把它称为模 A 的左 FGT-平坦维数或 FGT-弱维数.

又记

$$\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\mid \forall\ A\in\mathscr{C}_\Lambda^L\},$$

并把它称为环 Λ 的左 FGT-弱整体维数，或左 FGT-平坦维数. 若这样的数不存在，则规定 $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda=\infty$.

类似地，可以定义右 Λ-模的右 FGT-平坦维数和环的右 FGT-弱整体维数.

命题 5.6.5 设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)=0$, $\forall$ f.g. 半自反右 Λ-模 B;

(iii) 若 $0\to U_n\to U_{n-1}\to\cdots\to U_0\to A\to 0$ 正合，其中每个 U_i 是 FGT-平坦模，$0\leqslant i\leqslant n-1$，则 U_n 是 FGT-平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 对 n 作数学归纳法. 当 $n=0$ 时，结论成立是显然的. 当 $n=1$ 时，因 B 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模，故有右 Λ-模的正合列

$$0\to K\to F\to B\to 0, \tag{2}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是半自反模. 因而又得正合列

$$\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(F,A)\to\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(B,A)\to\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K,A)\to\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(F,A).$$

由于 F 是自由模，$\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(F,A)=\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(F,A)=0$，因此得 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K,A)\cong\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(B,A)$. 但 $K=\varinjlim K_\alpha$，K_α 是 K 的 f.g. 子模，

$$\therefore\quad \mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(B,A)\cong\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\varinjlim K_\alpha,A)\cong\varinjlim\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K_\alpha,A). \tag{3}$$

因此，当 l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A=0$ 时，由于 K_α 是 f.g. 半自反模，必有 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K_\alpha,A)=0$. 由(3)即知 $\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(B,A)=0$. 当 l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A=1$ 时，由定义也得 $\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(B,A)=0$. 现在，假定 $n>1$，B 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模，由(2)得

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)\cong\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(K,A).$$

应用归纳法假设得 $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(K_\alpha,A)=0$. 因而 $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(K,A)=0$. 所以 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)=0$.

(ii)⇒(iii) 若右 Λ-模序列

$$0\to U_n\to U_{n-1}\to\cdots\to U_0\to A\to 0 \tag{4}$$

正合，其中每个 U_i 是 FGT-平坦模，$0\leqslant i\leqslant n-1$. 令 B 是任意f.g. 半自反右 Λ-模，由(i)⇒(ii)的证明可知，$\mathrm{Tor}_m^{\Lambda}(B,U_i)=0$, $\forall\ m>0$，$0\leqslant i\leqslant n-1$. 因此由(4)得

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)\cong\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B,U_n).$$

于是由(ii)得

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)=\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B,U_n)=0.$$

故 U_n 是 FGT-平坦模.

(iii)⇒(i) 作左 Λ-模的正合列

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to A\to 0,\qquad(5)$$

其中 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 是投射模，因而也是 FGT-平坦模. 由(iii)知 P_n 是 FGT-平坦模. 于是对任意 f.g. 半自反右 Λ-模 B，由正合列(5)得

$$\mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(B,A)\cong\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B,P_n)=0.$$

所以 l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A\leqslant n$.

命题 5.6.6 设 Λ 是任意环，则

(i) l. FGT-W. $\dim\Lambda=\sup\{\mathrm{r.fd}_\Lambda B\mid\forall$ f.g. 半自反右 Λ 模 $B\}$；

(ii) 若 Λ 是左自 FP-内射，必有 l. FGT-W. $\dim\Lambda=$ W. gl. $\dim\Lambda$；若 Λ 是左、右自 FP—内射，则

$$\text{l. FGT-W.}\dim\Lambda=\text{r. FGT-W.}\dim\Lambda=\text{W. gl.}\dim\Lambda;$$

(iii) l. FGT-W. $\dim\Lambda\leqslant$ W. gl. $\dim\Lambda\leqslant$ l. FGT-W. $\dim\Lambda+1$.

证明 (i) 假定 l. FGT-W. $\dim\Lambda=n<\infty$，B 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模 B，A 是任意左 Λ-模. 因 l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A\leqslant n$，故由命题 5.6.5 知，$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)-0$. 所以 $\mathrm{r.fd}_\Lambda B\leqslant n$. 反过来，令 $\mathrm{r.fd}_\Lambda B\leqslant m$，则对任意左 Λ-模 A，皆有 $\mathrm{Tor}_m^{\Lambda}(B,A)=0$. 由命题 5.6.5 知，l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A\leqslant m$. 所以

$$\text{l. FGT-W.}\dim\Lambda=\sup\{\mathrm{r.fd}_\Lambda B\mid\forall\text{ f.g. 半自反右 }\Lambda\text{-模 }B\}.$$

(ii) 假定 l. FGT-W. $\dim\Lambda=n<\infty$，令 I 是 Λ 的任意 f.g. 右理想，则 Λ/I 是 f.p. 右 Λ-模. 但 Λ 是左自 FP-内射，由定理 5.3.5 知，Λ/I 是 f.g. 半自反右 Λ-模. 应用(i)得

$$\sup\{\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\mid\forall\text{ f.g. 右理想 }I\}\leqslant\text{l. FGT-W.}\dim\Lambda.$$

再由定理 2.3.2 便得 l. FGT-W. $\dim\Lambda=$ W. gl. $\dim\Lambda$.

当 Λ 是左、右自 FP-内射时，第二个等式成立是显然的.

(iii) 设 I 是 Λ 的任意 f.g 右理想，则有正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$. 因而 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/I)\leqslant\mathrm{r.fd}_\Lambda I+1$. 再由定理 2.3.2 和上面证明的结论(i)，可得

$$\text{l. FGT-W.}\dim\Lambda\leqslant\text{W. gl.}\dim\Lambda\leqslant\text{FGT-W.}\dim\Lambda+1.$$

定理 5.6.7 设 Λ 是左 π-凝聚环，则 l. FGT-W. $\dim\Lambda=0$ 当且仅当 Λ 是左半遗传环.

证明 若 l. FGT-W. $\dim\Lambda=0$，则由命题 5.6.6(iii)知，

$W.gl.\dim\Lambda\leqslant 1$. 又因 Λ 是左凝聚环，故由定理 2.3.17 知，Λ 是左半遗传环. 反过来，对任意 f.g. 半自反右 Λ-模 A，因 Λ 是左 π-凝聚环，故有正合列$0\to A\to F$，其中 F 为 f.g. 自由的. 但 Λ 是左半遗传环，故 A 必为投射模. 从而对任意左 R-模 M，皆有 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,M)=0$. 故 $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda=0$.

定理 5.6.8 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda=1$；

(ii) 存在左 Λ-模 A，使得 $l.FGT\text{-}fd_\Lambda A=1$，且任意 f.g. 自由右 Λ-模的闭子模是平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 因 $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda=1$，故对任意左 Λ-模 B，均有 $l.FGT\text{-}fd_\Lambda B\leqslant 1$，且存在一个左 Λ-模 A，使得 $l.FGT\text{-}fd_\Lambda A=1$. 其次，设 K 是任意 f.g. 自由右 Λ-模 F 的闭子模，则 F/K 是 f.g. 半自反右 Λ-模，并由命题 5.6.5 知，$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F/K,B)=0$. 因而$r.fd_\Lambda(F/K)\leqslant 1$. 于是 $r.fd_\Lambda K-0$. 故 K 是平坦模.

(ii)⇒(i) 因为存在左 Λ-模 A，使得 $l.FGT\text{-}fd_\Lambda A=1$，所以 $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda\geqslant 1$. 另外，设 B 是任意 f.g. 半自反右 Λ-模，于是得右 Λ-模的正合列 $0\to K\to F\to B\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模. 又因 B 是半自反的，故 K 是 F 的闭子模. 于是由(ii)又知 K 为平坦模. 因而 $r.fd_\Lambda B\leqslant 1$. 所以 $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda\leqslant 1$. 因此$l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda=1$.

定理 5.6.9 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，$n\geqslant 1$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $l.FGT\text{-}W.\dim\Lambda\leqslant n$；

(ii) $r.fd_\Lambda(A^*)\leqslant n-1$，$\forall$ f.g. 半自反左 Λ-模 A；

(iii) $r.pd_\Lambda(A^*)\leqslant n\text{-}1$，$\forall$ f.g. 半自反左 Λ-模 A；

(iv) $r.fd_\Lambda(A^*)\leqslant n-1$，$\forall$ 左 Λ-模 A.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，则有左Λ-模的正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow F_0\xrightarrow{g} A\longrightarrow 0,\tag{6}$$

其中 F_0 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反的. 再由命题 5.2.3，又得右

Λ-模正合列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{g^*} F_0^* \longrightarrow B \longrightarrow 0, \tag{7}$$

$K \cong B^*$，而 B 是 f. g. 半自反右 Λ 模. 又因 F_0^* 是平坦模，且 l. FGT-W. dim$\Lambda \leqslant n$，故 r. $\mathrm{fd}_\Lambda A^* \leqslant n-1$.

(ii)⇔(iii) 设 A 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模，且 Λ 是右 π-凝聚，则 A^* 是 f. g. 半自反右 Λ-模. 因而 A^* 是 f. p. 的. 于是得 r. $\mathrm{fd}_\Lambda A^*$ = r. $\mathrm{pd}_\Lambda A^*$. 故(ii)⇔(iii)是成立的.

(ii)⇒(i) 设 A 是任意 f. g. 半自反右 Λ-模，则有正合列(6)，(7). 因 B 为 f. g. 半自反左 Λ-模，故由(ii)得 r. $\mathrm{fd}_\Lambda K$ = r. $\mathrm{fd}_\Lambda(B^*) \leqslant n-1$. 再由(6)得 r. $\mathrm{fd}_\Lambda A \leqslant n$. 所以 l. FGT-W. $\dim_\Lambda \leqslant n$.

(i)⇒(iv) 设 A 是任意左 Λ-模，则有左 Λ-模的正合列

$$\Lambda^{(I_1)} \to \Lambda^{(I_0)} \to A \to 0,$$

其中 I_0, I_1 是指标集. 因而又得右 Λ-模的正合列

$$0 \to A^* \to \Lambda^{I_0} \to \Lambda^{I_1}.$$

因 Λ 是左凝聚环，故 $\Lambda^{I_0}, \Lambda^{I_1}$ 为平坦模. 又因为 l. FGT-W. dim$\Lambda \leqslant n$，所以 r. $\mathrm{fd}_\Lambda(A^*) \leqslant n-1$.

(iv)⇒(ii) 结论成立是显然的.

推论 5.6.10 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) l. FGT-W. dim$\Lambda \leqslant 1$；

(ii) f. g. 半自反左 Λ-模的对偶模是平坦模；

(iii) f. g. 半自反左 Λ-模的对偶模是投射模；

(iv) 任意左 Λ-模的对偶模是平坦模.

最后，我们讨论 FGT-平坦维数与 FGT-内射维数间的联系.

设 Λ 是环，A 是左 Λ-模，记 $A^+ = \mathrm{Hom}_Z(A, Q/Z)$，这里 Q 是有理数加群，Z 是整数环，并把 A^+ 称为 A 的特征模.

命题 5.6.11 设 Λ 是环，A 是左 Λ-模，则

(i) l. FGT-$\mathrm{fd}_\Lambda A$ = r. FGT-$\mathrm{Id}_\Lambda A^+$；

(ii) 若 Λ 是左 π-凝聚环，则

$$\text{l. FGT-Id}_\Lambda A = \text{r. FGT-fd}_\Lambda A^+.$$

证明 (i) 设 B 是任意 f. g. 半自反右 Λ-模，则

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(B,A^{+})\cong\mathrm{Tor}_{n}^{\Lambda}(B,A)^{+}.$$

∴ $\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A=\mathrm{r.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A^{+}$.

(ii) 设 B 是任意 f. g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左 π-凝聚环，故 B 是 f. p. 的. 因而 B 具有有限投射分解. 于是

$$\mathrm{Tor}_{n}^{\Lambda}(A^{+},B)\cong\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(B,A)^{+},$$

∴ $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A=\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A^{+}$.

推论 5.6.12 设 Λ 是环，A 是左 Λ-模，则

(i) A 是 FGT-平坦⇔A^{+}是 FGT-内射；

(ii) 若 Λ 是左 π-凝聚环，则 A 是 FGT-内射⇔A^{+}是 FGT-平坦.

定理 5.6.13 设 Λ 是环，则

(i) $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda$；

(ii) 若 Λ 是右 π-凝聚环，则

$$\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda=\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda.$$

证明 (i) 不妨设 $\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda=n<\infty$，$A$ 是任意左 Λ-模，则 A^{+}是右 Λ-模. 因而 $\mathrm{r.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A^{+}\leqslant n$. 于是由命题 5.6.11(i)知，$\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A\leqslant n$.

∴ $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda$.

(ii) 首先，由(i)得 $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda$.

反过来，若 $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda=n<\infty$，$A$ 是任意右 Λ-模，因 Λ 是右 π-凝聚环，故由命题 5.6.11(ii)，得

$$\mathrm{r.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A=\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A^{+}\leqslant n.$$

因此 $\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda$.

综合以上讨论，得 $\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda=\mathrm{r.FGT\text{-}I.dim}\Lambda$.

定义 设 Λ 是任意环，令

$$\mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}E\mid\forall\ \text{内射左}\ \Lambda\text{-模}\ E\}.$$

同样，可以定义 $\mathrm{r.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda$.

由定义知，$\mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.FGT\text{-}W.dim}\Lambda$. 另外，$\mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda=0$⇔每个内射左 Λ-模是 FGT-平坦模，把这类环称为左 GIF-环.

命题 5.6.14 设 Λ 是任意环，且l. FGT-W. dim$\Lambda<\infty$，则

$$\text{l. FGT-IF. dim}\Lambda=\text{l. FGT-W. dim}\Lambda.$$

证明 设 l. FGT-IF. dim$\Lambda=n$，若存在 f.g. 半自反右 Λ-模 A，使得 r. fd$_\Lambda A=m$ 且 $m>n$. 令 B 是任意左 Λ-模，则有左 Λ-模的正合列 $0\to B\to E\to E/B\to 0$，其中 E 是内射模. 于是又得正合列

$$\text{Tor}_{m+1}^{\Lambda}(A,E/B)\to\text{Tor}_m^{\Lambda}(A,B)\to\text{Tor}_m^{\Lambda}(A,E).$$

因 r. fd$_\Lambda A=m$，故 $\text{Tor}_{m+1}^{\Lambda}(A,E/B)=0$. 又因 $m>n=$l. FGT-IF. dimΛ，故 $\text{Tor}_m^{\Lambda}(A,E)=0$. 从而 $\text{Tor}_m^{\Lambda}(A,B)=0$，对任意左 Λ-模 B. 于是得 r. fd$_\Lambda A<m$. 这就导出矛盾，因此对任意 f.g. 半自反右 Λ-模 A，皆有 r. fd$_\Lambda A\leqslant n$. 又由命题 5.6.6 可知，l. FGT-W. dim$\Lambda\leqslant n$. 所以 l. FGT-IF. dimΛ=l. FGT-W. dimΛ.

推论 5.6.15 设 Λ 是左 π-凝聚环，且 l. FGT-W. dim$\Lambda<\infty$，则 Λ 是左 GIF-环当且仅当 Λ 是左半遗传环.

证明 因 l. FGT-W. dim$\Lambda<\infty$，由命题 5.6.14，得

$$\text{l. FGT-IF. dim}\Lambda=\text{l. FGT-W. dim}\Lambda.$$

又应用定理 5.6.7，便知结论是成立的.

定理 5.6.16 设 Λ 是环，则

(i) l. FGT-IF. dim$\Lambda=\sup\{$l. FGT-fd$_\Lambda A^+\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^R$，且 r. fd$_\Lambda A<\infty\}$；

(ii) 若 Λ 是右 π-凝聚环，则

l. FGT-IF. dim$\Lambda=\sup\{$l. FGT-fd$_\Lambda A^+\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^R$，且 r. FGT-fd$_\Lambda A<\infty\}$；

(iii) 若 Λ 是左、右 π-凝聚环，则

l. FGT-IF. dim$\Lambda=$

$\sup\{$l. FGT-fd$_\Lambda A\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 A 为 l. FGT-内射模$\}=$

$\sup\{$l. FGT-fd$_\Lambda A\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 l. FGT-Id$_\Lambda A<\infty\}$.

证明 (i) 设 E 是任意内射左 Λ-模，则 E^+ 是右 Λ-模. 于是有右 Λ-模正合列 $F\to E^+\to 0$，其中 F 是自由模. 故序列 $0\to E^{++}\to F^+$ 正合. 但 $0\to E\to E^{++}$ 正合，于是知 $0\to E\to F^+$ 正合. 因 E 是内射，故 E 是 F^+ 的直和项. 从而 l. FGT-fd$_\Lambda E\leqslant$l. FGT-fd$_\Lambda F^+$，且 r. fd$_\Lambda F<\infty$. 所以 (i)中左端$\leqslant$右端.

反过来，设 A 是任意右 Λ-模，且 $\mathrm{r.fd}_\Lambda A=n<\infty$，则有正合列

$$0\to U_n\to U_{n-1}\to\cdots\to U_0\to A\to 0,$$

其中每个 U_i 是平坦模，$0\leqslant i\leqslant n$. 从而又有正合列

$$0\to A^+\to U_0^+\to\cdots\to U_{n-1}^+\to U_n^+\to 0.$$

因 U_i 是平坦模，故 U_i^+ 是内射模，$0\leqslant i\leqslant n$. 由命题 5.6.5，易知 $\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A^+\leqslant\mathrm{Max}\{\mathrm{l.FGT-fd}_\Lambda U_i^+\mid 0\leqslant i\leqslant n\}$. 所以(i)中左端$\geqslant$右端.

综合以上讨论，(i)便成立.

(ii) 设 A 是任意右 Λ-模，且 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\leqslant n$. 令 I 是 Λ 的f.g.左理想，由正合列 $0\to I\to\Lambda\to\Lambda/I\to 0$ 得

$$\mathrm{Tor}_{n+2}^\Lambda(A,\Lambda/I)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,I).$$

因I是f.g.半自反，故$\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,I)=0$. 从而$\mathrm{Tor}_{n+2}^\Lambda(A,\Lambda/I)=0$. 所以 $\mathrm{r.fd}_\Lambda A\leqslant n+1$. 另外，如果 $\mathrm{r.fd}_\Lambda A\leqslant n+1$，$K$ 是任意f.g.半自反左Λ-模. 因 Λ 是右 π-凝聚环，故存在左 Λ-模正合列$0\to K\to F\to F/K\to 0$，其中 F 是 f.g. 自由模. 从而，又有正合列 $\mathrm{Tor}_{n+2}^\Lambda(A,F/K)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,K)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,F)$. 但 $\mathrm{Tor}_{n+2}^\Lambda(A,F/K)=\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,F)=0$，因此 $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(A,K)=0$. 故 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\leqslant n$.

由上面结果便知，若 A 是任意右 Λ-模，则 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A<\infty$当且仅当 $\mathrm{r.fd}_\Lambda A<\infty$. 再应用(i)，便知结论(ii)是成立的.

(iii) 因 Λ 是右 π-凝聚环，故由(ii)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda\\&=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A^+\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^R,\text{且 }\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A<\infty\}.\end{aligned}$$

设 A 是任意右 Λ-模，且 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A=n<\infty$，根据命题 5.6.11(i)可知，$\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A^+=n$. 于是得

$$\begin{aligned}&\mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda\\&\leqslant\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L,\text{且 }\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A<\infty\}.\end{aligned}\tag{8}$$

反过来，设 A 是任意左 Λ-模，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A=n<\infty$，因 Λ 是左 π-凝聚环，故由命题 5.6.11(ii)知，$\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda A^+=n$. 所以等式(8)反过来也是成立的.

$\therefore\quad \mathrm{l.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda$

$=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A<\infty\}$.

再证另一个等式. 显然有

$$\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L,\text{且 } A \text{ 为 FGT-内射}\}$$
$$\leqslant\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L,\text{且 } \mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A<\infty\}. \qquad (9)$$

反过来，设 A 是任意左 Λ-模，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A=n<\infty$. 因 Λ 是左 π-凝聚环，由命题 5.5.4(ii)知，存在左 Λ-模的正合列

$$0\to A\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_n\to 0,$$

其中每个 E_i 是 FGT-内射模，$0\leqslant i\leqslant n$. 于是得

$$\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A\leqslant\mathrm{Max}\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda E_i \mid 0\leqslant i\leqslant n\}.$$

故不等式(9)反过来也是成立的.

$\therefore\quad \sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 A 为 l. FGT-内射$\}$

$=\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A<\infty\}$.

定理 5.6.17 设 Λ 是左 π-凝聚环，则下面各值是相等的：

(i) $\mathrm{r.FGT\text{-}IF.dim}\Lambda$；

(ii) $\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda\Lambda$；

(iii) $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda Q$，$Q$ 是模范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^R$ 中任意内射余生成元；

(iv) $\sup\{\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda E(S) \mid S\in\mathscr{C}_\Lambda^R$，且 S 是单纯模$\}$；

(v) $\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda A \mid A\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_\Lambda A<\infty\}$；

(vi) $\sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_\Lambda U \mid U\in\mathscr{C}_\Lambda^L$，且 U 是平坦模$\}$.

证明 显然(ii)$\leqslant$(vi)$\leqslant$(v)，(iii)$\leqslant$(i).

(i)$\leqslant$(iii) 设 E 是任意内射右 Λ-模，因 Q 是余生成元，故有正合列 $0\to E\to Q^I$，这里 I 是指标集. 由于 E 是内射，这个序列是分裂正合的，因此 $Q^I=E\oplus E'$. 令 B 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，由于有

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(Q^I,B)\cong\mathrm{Tor}_n^\Lambda(E,B)\oplus\mathrm{Tor}_n^\Lambda(E',B),$$

因此 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda E\leqslant\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_\Lambda Q$. 所以(i)$\leqslant$(iii).

(iii)=(iv) 令 $\mathscr{S}$ 代表右 Λ-模范畴 $\mathscr{C}_\Lambda^R$ 内单纯模的不可缩短的代表集，记 $Q=\prod_{S\in\mathscr{S}}E(S)$，$E(S)$ 是模 S 的内射包络，则 Q 是 $\mathscr{C}_\Lambda^R$ 的一个内射余生成元. 设 B 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左-凝聚环，B 为 f.p. 的，故得

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}\left(\prod_{S\in\mathscr{S}} E(S), B\right) \cong \prod_{S\in\mathscr{S}} \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(E(S), B).$$

若 T 是任意一个单纯右 Λ-模，必存在 $S\in\mathscr{S}$，使得 $S\cong T$. 因此 $E(T)\cong E(S)$. 所以(iii)=(iv).

(v)=(i) 设 A 是任意左 Λ-模，且 $\mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A<\infty$. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故由命题 5.6.11 得

$$\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A=\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A^{+}.$$

$$\therefore\quad \sup\{\mathrm{l.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}A \mid A\in\mathscr{C}_{\Lambda}^{L}, \text{且 } \mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A<\infty\}$$
$$=\sup\{\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A^{-} \mid A\in\mathscr{C}_{\Lambda}^{L}, \text{且 } \mathrm{l.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}A<\infty\}.$$

因 Λ 是左 π-凝聚环，故由定理 5.6.16(ii)知(i)=(v).

(i)≤(ii) 设 E 是任意内射右 Λ-模，B 是任意 f.g. 半自反左 Λ-模. 因 Λ 是左 π-凝聚环，故 B 为 f.p. 的.

$$\therefore\quad \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda,E),B)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(B,\Lambda),E),$$
$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(E,B)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(B,\Lambda),E).$$

如果 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(B,\Lambda)=0$，那么 $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(E,B)=0$. 故 $\mathrm{r.FGT\text{-}fd}_{\Lambda}E\leqslant \mathrm{l.FGT\text{-}Id}_{\Lambda}\Lambda$. 于是知(i)≤(ii).

综合以上讨论知(i)=(ii)=(iii)=(iv)=(v)=(vi).

推论 5.6.18 设 Λ 是左 π-凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是右 GIF-环；

(ii) Λ 是左自 FGT-内射的；

(iii) $\mathscr{C}_{\Lambda}^{R}$ 中每个内射余生成元是 FGT-平坦模；

(iv) $\mathscr{C}_{\Lambda}^{R}$ 中每个单纯模是 FGT-平坦模；

(v) $\mathscr{C}_{\Lambda}^{L}$ 中每个 FGT-平坦维数有限的模是 FGT-内射模；

(vi) $\mathscr{C}_{\Lambda}^{L}$ 中每个平坦模是 FGT-内射模.

第六章

半局部环上的模及其同调性质

在1.6节中，我们介绍了半局部环，本章将进一步讨论半局部环上模的同调维数的性质，给出同调维数的计算法则和环的结构性质的同调特征，将拟局部环和局部环的一些主要结果推广到半局部环.

在本章里，所指的环仍是有单位元1的结合环，J 表示环的Jacobson根. 其他符号如果没有特别说明，均与前面相同.

6.1 Noether 半局部环的同调性质

首先，我们介绍 Noether 半局部环上模的同调维数计算公式.

引理 6.1.1 设 Λ 是左 Noether 环，A 是 f.g. 左 Λ-模，n 是非负整数，则 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$ 当且仅当对任意 f.g. 左 Λ/J-模 B，皆有 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0$.

证明 若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$，则显然有

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0, \forall\ \text{f.g. 左 } \Lambda/J\text{-模 } B.$$

反过来，对 n 作数学归纳法. 若 $n=0$，考虑左 Λ-模正合列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{\varphi}F\longrightarrow A\longrightarrow 0, \tag{1}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 的，则又得正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,K/JK)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(F,K/JK)$$

$$\xrightarrow{\varphi^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(K,K/JK)\longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,K/JK).$$

因 K/JK 是 f.g. 左 Λ/J-模，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,K/JK)=0$. 于是知 $\varphi^*=$

$\mathrm{Hom}_\Lambda(\varphi, K/JK)$是满同态. 因此对于自然同态 $f: K\to K/JK$，必存在Λ-同态 $g: F\to K/JK$，使得 $f=g\varphi$. 但 F 是自由模，考虑右图，其中行正合，因而存在 Λ-同态 $\psi: F\to K$，使得 $g=f\psi$.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & \searrow^{g} & & & \\ K & \xrightarrow{f} & K/JK & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\therefore \quad f=g\varphi=(f\psi)\varphi=f(\psi\varphi), f(1-\psi\varphi)=0.$$

令 $h=1-\psi\varphi$, 因 $fh=f(1-\psi\varphi)=0$，故 $h(K)\subseteq \mathrm{Ker}f=JK$. 于是得 $K=\psi\varphi(K)+h(K)=\psi\varphi(K)+JK$. 但是由 Nakayama 引理知 $JK\ll K$,所以 $K=\psi\varphi(K)$. 因此 $\psi\varphi: K\to K$ 是满同态，且 K 是 Noether 模. 故 $\psi\varphi$ 是 K 的一个自同构. 从而序列(1)是分裂正合的. 所以 A 是投射模，即 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=0$. 若 $n>0$，对任意 f.g. 左 Λ/J-模 B，则由(1)得正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(K,B)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B).$$

因 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(F,B)=\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(K,B)=0$. 由归纳法假设知 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K\leqslant n-1$. 因而由(1)得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$.

定理 6.1.2 设 Λ 是左 Noether 半局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$;

(ii) $\mathrm{l.fd}_\Lambda A\leqslant n$;

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$;

(iv) $\mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$.

证明 首先，由命题 2.5.4 知 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A=\mathrm{l.fd}_\Lambda A$. 因此 (i)$\Leftrightarrow$(ii)是成立的.

(i)$\Leftrightarrow$(iii) 显然(i)$\Rightarrow$(iii)成立. 反过来，因 Λ 是半局部环，若 B 是 f.g. 左 Λ/J-模，则 $B\oplus B'\cong(\Lambda/J)^{(m)}$，其中 m 是一个正整数，B' 是一个左 Λ/J-模. 于是得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)\oplus\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B')\\ &\quad=\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B\oplus B')=\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,(\Lambda/J)^{(m)})\\ &\quad=[\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)]^{(m)}=0.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,B)=0$. 故由引理 6.1.1 得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$.

(iii)⇔(iv)　因(ii)与(iii)是等价的，故(iii)⇒(iv)成立. 反过来，因 Λ/J 是半单环，故仿照定理 2.2.7 的证明方法，由 $\mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0$ 便可推得 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$.

推论 6.1.3　设 Λ 是左 Noether 半局部环，A 是 f.g. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是投射模；

(ii) A 是平坦模；

(iii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(A,\Lambda/J)=0$；

(iv) $\mathrm{Tor}_{1}^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0$.

证明　由定理 6.1.2 直接推得.

现在讨论 Noether 环的整体维数.

定理 6.1.4　(i) 设 Λ 是左 Noether 半局部环，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J). \tag{2}$$

(ii) 设 Λ 是左、右 Noether 半局部环，则

$$\begin{aligned}\mathrm{l.gl.dim}\Lambda&=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)\\&=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)\\&=\mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J),\end{aligned} \tag{3}$$

并且

$$\begin{aligned}\mathrm{l.gl.dim}\Lambda<n&\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(\Lambda/J,\Lambda/J)=0\\&\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_{n}^{\Lambda}(\Lambda/J,\Lambda/J)=0.\end{aligned} \tag{4}$$

证明　(i)　首先，由定理 3.2.2，得 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda$. 现在证明 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)$. 令 $\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)=n$，则对任意f.g. 左 Λ-模 A，皆有 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$. 由定理 6.1.2 知，$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}A\leqslant n$. 于是又由定理 2.3.2 得 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)$. 再应用推论 2.2.8 得 $\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)$. 因此(2)式成立.

(ii)　因 Λ 是左、右 Noether 环，故由命题 2.5.4 得 $\mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)$，$\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)$. 再由(i)便知等式(3)成立. 最后应用定理 6.1.2 知(4)式也成立.

推论 6.1.5　设 Λ 是左、右 Noether 半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是半单环；

(ii) Λ 是 VN 正则环；

(iii) 每个左(右)单纯 Λ-模是投射模；

(iv) Λ 是左(右)SF-环；

(v) Λ 是右(左)V-环.

推论 6.1.6 (i) 设 Λ 是左 Noether 半局部环，则 Λ 是左遗传环 $\Leftrightarrow \Lambda$ 的每个极大右理想是平坦模 $\Leftrightarrow J$ 是平坦右 Λ-模.

(ii) 设 Λ 是左、右 Noether 半局部环，则 Λ 是左遗传环 $\Leftrightarrow \Lambda$ 是右遗传环 $\Leftrightarrow \Lambda$ 的每个极大左(右)理想是投射模 $\Leftrightarrow$ 每个极大左(右)理想是平坦模 $\Leftrightarrow J$ 是投射左(右)Λ-模.

证明 (i) 设 m 是 Λ 的任意极大右理想，于是得正合列 $0 \to m \to \Lambda \to \Lambda/m \to 0$. 由定理 2.2.2 知，$\text{r.fd}_\Lambda(\Lambda/m) \leqslant 1 + \text{r.fd}_\Lambda m$. 同理，$\text{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J) \leqslant 1 + \text{r.fd}_\Lambda J$. 再由定理 2.3.13 和定理 6.1.4(i)，便知结论(i)成立.

(ii) 类似地应用定理 6.1.4(ii)，便知结论也成立.

下面，我们进一步应用同调维数刻划交换 Noether 半局部环的结构性质.

定理 6.1.7 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，且 $\text{gl.dim}\Lambda < \infty$，则 Λ 是有限个唯一分解整环的直和.

证明 首先，由定理 1.6.16 得

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n,$$

这里每个 Λ_i 是不可分的半局部环. 因 $\text{gl.dim}\Lambda < \infty$，故 $\text{gl.dim}\Lambda_i < \infty$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 并且由定理 1.6.15 知，每个不可分半局部环 Λ_i 是 FP-环，即 Λ_i 是有限整体维数的 Noether FP-环. 因而由推论 4.5.3 知，每个 Λ_i 是唯一分解整环.

这个定理包含了 Auslander-Buchsbaum-Nagata 定理.

推论 6.1.8 设 Λ 是交换 Noether 不可分半局部环，且 $\text{gl.dim}\Lambda = 1$，则 Λ 是主理想整环.

证明 设 I 是 Λ 的任意理想，则由 $\text{gl.dim}\Lambda = 1$ 知 I 是投射 Λ-模. 但 Λ 是不可分半局部环，故由定理 1.6.15 知 I 是自由模. 再由定理

6.1.7 知 Λ 是整环. 因而 I 是主理想. 故 Λ 是主理想整环.

推论 6.1.9 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，则 Λ 是遗传环当且仅当 Λ 是有限个主理想整环的直和.

证明 若 Λ 是遗传环，则由定理 2.3.13 知 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$. 故由定理 6.1.7 知，$\Lambda$ 是有限个整环的直和，且每个整环的整体维数 $\leqslant 1$. 于是根据推论 6.1.8 知，Λ 是有限个主理想整环的直和.

反过来，若 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是主理想整环，则因 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_i\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant n$. 故 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$. 因此 Λ 是遗传环.

我们知道当 Λ 是交换 Noether 局部环时，由 3.5 节(1)式得

$$\mathrm{f.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant \mathrm{K}d\Lambda\leqslant \mathrm{Vd}\Lambda\leqslant \mathrm{gl.dim}\Lambda.$$

对于半局部环的各种维数也可以作相应的比较.

定义 设 Λ 是任意交换环，记 $\dim\Lambda=\sup\{n\,|\,P_0\subset P_1\subset\cdots\subset P_n$ 是 Λ 中素理想严格升链$\}$，并把它称为环 Λ 的 Krull 维数. 若这样的最大值不存在，则规定 $\dim\Lambda=\infty$.

若 Λ 是交换 Noether 局部环，则 $\dim\Lambda=\mathrm{Kd}\Lambda$.

定义 设 Λ 是任意交换环，P 是环 Λ 的素理想，则形如 $P_0\subset P_1\subset\cdots\subset P_m=P$ 的 Λ 中素理想链的长度 m 的最大值称为 P 的高，并表示成 $h(P)$.

设 Λ 是任意交换环，I 是 Λ 的理想，P 是素理想. 若 $P\supseteq I$，并且当 $P\supseteq P'\supseteq I$ 时，这里 P' 也是 Λ 的一个素理想，则必有 $P=P'$. 此时称 P 为理想 I 上的极小素理想.

下面，Λ 始终表示交换 Noether 半局部环.

Krull 定理 设 Λ 是交换 Noether 环，I 是 Λ 的真理想，并且，I 是 n 个元素生成的，则任何 I 上的极小素理想的高 $\leqslant n$(文献[44]).

定理 6.1.10 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，$n=l(J/J^2)$ 是半单纯模 J/J^2 的长度，则

$$\dim\Lambda\leqslant n.$$

证明 若 $J=0$，则 Λ 是有限个域的直和. 因而 $\dim\Lambda=0$.

若 $J\neq 0$，设 m 是 Λ 的任意极大理想，则显然 m 是 J 上的素理想. 若 P 是 Λ 的素理想，且 $m\supseteq P\supseteq J$，则因 $\Lambda/P\cong(\Lambda/J)/(P/J)$ 是整环，

而 Λ/J 是有限个域的直和，故 Λ/P 也是域，即 P 是极大理想. 从而 $m=P$. 于是知 m 为 J 上的极小素理想. 根据 Krull 定理，仅需证明 J 是由 n 个元素生成即可.

因为 n 是 Λ/J-模 J/J^2 的长度，所以 $J/J^2=\bigoplus_{i=1}^n(\Lambda/J)\overline{x_i}$，这里 $x_i\in J$. 令 $A=\sum_{i=1}^n\Lambda x_i$，则 $A+J^2=J$. 考虑 $B=J/A$，它是 f. g. 的 Λ-模，且 $JB=B$. 由 Nakayama 引理知 $B=0$，即 $J=\sum_{i=1}^n\Lambda x_i$.

命题 6.1.11 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，则

$$\text{f. gl. dim}\Lambda\leqslant\text{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant\dim\Lambda\leqslant\begin{cases}\text{gl. dim}\Lambda,\\ l(J/J^2),\end{cases}\tag{5}$$

这里 $\text{Codh}_\Lambda\Lambda=\sup\{m\text{-Codh}_\Lambda\Lambda\mid\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$，而 m-$\text{Codh}_\Lambda\Lambda$ 是在极大理想 m 中极大 Λ-序列的长度.

证明 设 A 是 f. g. 的 Λ-模，且 $\text{pd}_\Lambda A<\infty$，由定理 3.1.7 得 $\text{pd}_\Lambda A=\sup\{\text{pd}_{\Lambda_m}(A_m),\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$. 又因 Λ_m 是交换 Noether 局部环，故根据定理 3.4.5 知 $\text{pd}_{\Lambda_m}(A_m)\leqslant\text{Codh}_{\Lambda_m}\Lambda_m$. 但 $\text{Codh}_\Lambda\Lambda=\sup\limits_m\text{Codh}_{\Lambda_m}\Lambda_m$，因此有

$$\text{Pd}_\Lambda A\leqslant\text{Codh}_\Lambda\Lambda.$$

于是得 $\text{f. gl. dim}\Lambda\leqslant\text{Codh}_\Lambda\Lambda$.

对于 Λ 的任意极大理想 m，Λ_m 是交换 Noether 局部环，故 $\text{Codh}_{\Lambda_m}\Lambda_m\leqslant\dim\Lambda_m$. 而 $\dim\Lambda=\sup\limits_m\dim\Lambda_m$，因此就得到 $\text{Codh}_\Lambda\Lambda\leqslant\dim\Lambda$.

最后，因 Λ_m 是交换 Noether 局部环，故 $\dim\Lambda_m\leqslant\text{gl. dim}\Lambda_m$. 又由定理 3.2.9 知 $\text{gl. dim}\Lambda=\sup\limits_m\text{gl. dim}\Lambda_m$，故 $\dim\Lambda\leqslant\text{gl. dim}\Lambda$. 再根据定理 6.1.10 就得 $\dim\Lambda\leqslant l(J/J^2)$.

当 Λ 具有有限整体维数时，由(5)必有

$$\text{f. gl. dim}\Lambda=\text{Codh}_\Lambda\Lambda=\dim\Lambda=\text{gl. dim}\Lambda,$$

但是未必有等式 $\text{gl. dim}\Lambda=l(J/J^2)$.

若 Λ 是交换 Noether 局部环，则由定理 3.5.5 和定理 3.5.6 知，Λ 是正则局部环当且仅当 $\text{gl. dim}\Lambda=\text{Vd}\Lambda$. 现在，我们把这个结论推广到半局部环.

定理 6.1.12 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda = l(J/J^2)$ 当且仅当 $\Lambda=\Lambda_1\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_n$，这里 Λ_1 是正则局部环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_1=\mathrm{gl.dim}\Lambda$，$F_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是域(或者 $F_i=0$).

证明 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=l(J/J^2)$，则 $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$. 因而由定理6.1.7知 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，这里每个 Λ_i 是唯一分解整环. 设 J_i 是 Λ_i 的 Jacobson 根，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $l(J/J^2)=l(J_1/J_1^2)+l(J_2/J_2^2)+\cdots+l(J_n/J_n^2)$. 而 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{gl.dim}\Lambda_i$，不妨设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda_1$，则由命题 6.1.11 可得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_1=\dim\Lambda_1\leqslant l(J_1/J_1^2)$. 于是便有

$$\begin{aligned}\mathrm{gl.dim}\Lambda_1 &=\mathrm{gl.dim}\Lambda=l(J/J^2)\\ &=l(J_1/J_1^2)+l(J_2/J_2^2)\\ &\quad+\cdots+l(J_n/J_n^2)\leqslant l(J_1/J_1^2).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad l(J_2/J_2^2)=\cdots=l(J_n/J_n^2)=0,\quad \mathrm{gl.dim}\Lambda_1=l(J_1/J_1^2).$$

根据 Nakayama 引理推出 $J_i=0, 2\leqslant i\leqslant n$. 从而 Λ_i 是域，$2\leqslant i\leqslant n$. 综合以上讨论得 $\Lambda=\Lambda_1\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_n$，其中 F_i 是域，Λ_1 是半局部整环，且

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda_1=\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty.$$

现在证明 Λ_1 是局部环. 为方便起见，用 R 表示 Λ_1，J 表示 J_1，并且设 $m_1,m_2,\cdots,m_t$ 为它的全部极大理想.

设 $\hat{R}$ 是 R 关于 J 的完备环，则 $\hat{R}/\hat{J}\cong R/J$. 而 R/J 是半单环，故 $\hat{J}$ 包含了 $\hat{R}$ 的 Jacobson 根. 但 $\hat{J}\subseteq Rad\hat{R}$，所以 $\hat{J}$ 是 $\hat{R}$ 的 Jacobson 根.

设 S 是任意单纯 R-模，则 $S\cong R/m$，m 是 R 的某个极大理想. 因为完备函子 $A\to\hat{A}$ 是 f.g. R-模范畴到 $\hat{R}$-模范畴的正合函子，所以有 $\hat{S}=\hat{R}/\hat{m}$. 又因为 $\hat{m}$ 是 $\hat{R}$ 的极大理想，所以 $\hat{S}$ 是单纯 $\hat{R}$-模. 再由 $(J/J^2)^\wedge\cong\hat{J}/\hat{J}^2$，得 $l(J/J^2)=l(\hat{J}/\hat{J}^2)$. 另一方面，还有 $\mathrm{gl.dim}R=\mathrm{gl.dim}\hat{R}$，因而得 $l(\hat{J}/\hat{J}^2)=l(J/J^2)=\mathrm{gl.dim}R=\mathrm{gl.dim}\hat{R}$. 而 $\hat{R}\cong\hat{R}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\hat{R}_{m_t}$，根据上面的讨论，上式中除一项，不妨说是 $\hat{R}_{m_1}$ 外，其余都是域. 对任意 $2\leqslant i\leqslant t$，$(m_i)_{m_i}\subseteq[(m_i)_{m_i}]^\wedge=0$，故 $(m_i)_{m_i}=0$. 又因 R 是整环，故这是不可能的. 所以 $m_2=\cdots=m_t=0$，R 是局部环.

反过来，若 $\Lambda=\Lambda_1\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_n$，$\Lambda_1$ 是有限整体维数的交换 Noether 局部环，F_i 是域($1\leqslant i\leqslant n$)，则显然有 $l(J/J^2)=l(m_1/m_1^2)=\text{gl.}\dim\Lambda_1=\text{gl.}\dim\Lambda$，$m_1$ 是 Λ_1 的唯一极大理想.

最后，我们构造一个半局部环的例子.

命题 6.1.13 设 t,n 是两个自然数，则可以找到一个不可分的交换 Noether 半局部环 Λ，满足：(i)Λ 恰好有 t 个极大理想；(ii) $\text{gl.}\dim\Lambda=n$.

证明 设 C 是复数域，$\Lambda=C[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是系数在 C 上的 n 个未定元的多项式环. 由定理 2.3.11 知 $\text{gl.}\dim\Lambda=n$. 而$\text{gl.}\dim\Lambda=\sup\{\text{gl.}\dim\Lambda_m,\forall\ m\in\text{Max}(\Lambda)\}$，因此存在极大理想 m_1 使得 $\text{gl.}\dim\Lambda_{m_1}=n$.

又因为 C 是代数闭域，所以 Λ 的每个极大理想具有形式 $(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$，$a_i\in C$. 特别地，$m_1=(x_1-a_{11},x_2\text{-}a_{12},\cdots,x_n-a_{1n})$.

令 $m_j=(x\text{-}a_{11}\text{-}j+1,x_2\text{-}a_{12},\cdots,x_n-a_{1n})$，$1\leqslant j\leqslant t$. 因 C 是复数域，故 $m_j(1\leqslant j\leqslant t)$是 Λ 的 t 个不同的极大理想. 作

$$S=\{f(x_1,\cdots,x_n)\in\Lambda\mid f(a_{11}+j-1,a_{12},\cdots,a_{1n})\neq 0,1\leqslant j\leqslant t\},$$

显然 S 是 Λ 的包含 1 而不包含零的乘法闭集. 设 $S_1=\Lambda\backslash m_1$ 是对应于 m_1 的乘法闭集，易知 $S\subseteq S_1$. 因而 $\Lambda_{S_1}\cong(\Lambda_S)_{S_1/S}$，亦即 $\Lambda_{m_1}\cong(\Lambda_S)_{(S_1/S)}$(文献[44]命题 7.4).

令 $R=\Lambda_S$，则 R 满足我们的条件.

首先，因为 Λ 是 Nother 整环，所以 R 是不可分环. 由引理 3.2.8 得

$$n=\text{gl.}\dim\Lambda\geqslant\text{gl.}\dim\Lambda_S\geqslant\text{gl.}\dim(\Lambda_S)_{S_1/S}=\text{gl.}\dim\Lambda_{S_1}=n.$$

其次，R 的极大理想个数等于 Λ 中关于 $S\cap P=\Phi$ 的素理想 P 的极大元的个数. 易知 $S=\bigcap_{j=1}^t(\Lambda\text{-}m_j)$. 若 Λ 的素理想 P 关于$P\cap S=\Phi$ 是极大元，则 $P\subseteq(\Lambda-S)=\bigcup_{j=1}^t m_j$. 由此对某个 j，$P\subseteq m_j$. 但显然 $m_j\cap S=\Phi$，所以由 P 的极大性知 $P=m_j$. 这样，R 有且仅有 t 个极大理想.

综合以上讨论，$R=\Lambda_S$ 有且仅有 t 个极大理想，并且它的整体维数等于 n，R 还是 Noether 不可分的半局部环.

6.2 半局部环的全维数

Auslander-Buchsbaum 定理告诉我们，正则局部环上 f. g. 模的投射维数与余同调维数之和必等于环的整体维数. 这个定理对于一般有限整体维数交换 Noether 半局部环是不成立的. 本节主要给出这个结论在半局部环上成立的充要条件.

下面, Λ 始终表示有限整体维数交换 Noether 半局部环，简称正则半局部环，$m_1, m_2, \cdots, m_t$ 是它的所有极大理想，J 是 Λ 的 Jacobson 根，所有的 Λ-模是 f. g. 的.

设 A 是 Λ-模，用 m_i-$\mathrm{Codim}_\Lambda A$ 表示在 m_i 中极大 A-序列的长度，并记 $\mathrm{Codim}_\Lambda A = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant t} m_i$-$\mathrm{Codim}_\Lambda A$.

设 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ 是 J 中极大 A-序列，令 $A_{(i)} = A/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i)A$, $A_{(0)} = A$, $\Lambda_{(i)} = \Lambda/(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i)\Lambda$, $\Lambda_{(0)} = \Lambda, 0\leqslant i\leqslant S$, 则

$$\mathrm{pd}_\Lambda A_{(i)} + \mathrm{Codim}_{\Lambda_{(i)}} A_{(i)} = \mathrm{pd}_\Lambda A_{(j)} + \mathrm{Codim}_{\Lambda_{(j)}} A_{(j)}, 0\leqslant i < j \leqslant S. \quad (1)$$

定义 (1)中的共同值称为 A 的次全维数，记为 $\mathrm{ptd}_\Lambda A$，而把 $\sup\limits_A \mathrm{ptd}_\Lambda A$ 称为环 Λ 的全维数，记为 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda$.

若 Λ 是正则局部环，则 $\mathrm{Codim}_\Lambda A$ 就是模 A 的余同调维数，并且 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$.

命题 6.2.1 设 Λ 至少含有两个极大理想，且

$$\mathrm{gl.\,dim}\Lambda = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} \geqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2} \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_t},$$

则 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$.

证明 设 A 是 f. g. Λ-模.

(i) 当 $\mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} > \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$ 时，由定理 3.1.7 知 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_i}$. 若 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1}$，则得

$$\begin{aligned}\mathrm{ptd}_\Lambda A &= \mathrm{pd}_\Lambda A + \mathrm{Codim}_\Lambda A \\ &= \mathrm{Pd}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} + \sup_{1\leqslant i\leqslant t} m_i - \mathrm{Codim}_\Lambda A \\ &= \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} + \sup_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_i}.\end{aligned}$$

因 Λ_{m_i}是正则局部环，故 $\mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_i} \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_i}$. 又因$\mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} >$ $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$，故得

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_1} = \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{ptd}_\Lambda A &= \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} + \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1}\\ &\leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}\\ &= \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}.\end{aligned} \tag{2}$$

若 $\mathrm{pd}_\Lambda A = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_i} = \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_j}} A_{m_j} (j\neq 1)$，则得

$$\begin{aligned}\mathrm{ptd}_\Lambda A &= \mathrm{pd}_\Lambda A + \mathrm{Codim}_\Lambda A = \mathrm{pd}_{\Lambda_{m_j}} A_{m_j} + \mathrm{Codim}_\Lambda A\\ &\leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_j} + \mathrm{Codim}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_2 + \mathrm{Codim}_\Lambda A\\ &\leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2} + \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2} + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1}\\ &= \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}.\end{aligned}$$

故(2)式仍然成立.

(ii) 当 $\mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_1}} A_{m_1} \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$时，则有 $\mathrm{Codim}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$. 从而得

$$\mathrm{ptd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_\Lambda A + \mathrm{Codim}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}.$$

这样，总有 $\mathrm{ptd}_\Lambda A \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$. 于是由 A 的任意性及 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda$的定义，便得 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$.

其次，令 $A = \Lambda \oplus \Lambda/m_1$，于是

$$\mathrm{pd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/m_1) = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda. \tag{3}$$

又∵ $A_{m_2} = \Lambda_{m_2} \oplus (\Lambda/m_1)_{m_2} = \Lambda_{m_2}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{Codim}_\Lambda A &= \sup_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_i}} A_{m_i} \geqslant \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_2}} A_{m_2}\\ &= \mathrm{Codim}_{\Lambda_{m_2}} \Lambda_{m_2} = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{ptd}_\Lambda A = \mathrm{pd}_\Lambda A + \mathrm{Codim}_\Lambda A \geqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$.

因此 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda \geqslant \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$.

综合以上讨论，即得 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda = \mathrm{gl.\,dim}\Lambda + \mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2}$.

推论 6.2.2 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda > \mathrm{gl.\,dim}\Lambda$ 当且仅当 Λ 至少有两个极大理想 m_1, m_2，使 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} > 0$ 和 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_2} > 0$.

证明 若 Λ 有两个极大理想 m_1, m_2，使 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m_1} > 0$ 和

$\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$，不妨设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}$，则由命题 6.2.1 的证明得

$$\mathrm{t.dim}\Lambda\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>\mathrm{gl.dim}\Lambda.$$

反过来，若 Λ 只有唯一极大理想，则 Λ 是正则局部环. 因而对任意 f.g. Λ-模 A 皆有

$$\mathrm{ptd}_\Lambda A=\mathrm{pd}_\Lambda A+\mathrm{codim}_\Lambda A\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda.$$

于是 $\mathrm{t.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda$. 这与 $\mathrm{t.dim}\Lambda>\mathrm{gl.dim}\Lambda$ 矛盾，因此可以假定 Λ 至少有两个极大理想. 令 $m_1,\cdots,m_t$ 是 Λ 的全部极大理想，不妨设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_t}$. 若 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}=0$，则由命题 6.2.1 可得 $\mathrm{t.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}=\mathrm{gl.dim}\Lambda$，这与 $\mathrm{t.dim}\Lambda>\mathrm{gl.dim}\Lambda$ 矛盾，所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$. 因此，$\Lambda$ 至少有两个极大理想 m_1，m_2，使 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$ 和 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}<\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}$.

定理 6.2.3 $\mathrm{t.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda$ 当且仅当 $\Lambda=\Lambda_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_s$，其中每个 F_i 是域，Λ_0 是正则局部环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_0=\mathrm{gl.dim}\Lambda$.

证明 若 Λ 只有唯一极大理想，则由定理 3.4.8 便知结论成立.

下面设 Λ 至少有两个极大理想.

因 Λ 是正则半局部环，故由定理 6.1.7 得 $\Lambda=\Lambda_0\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_s$，这里 Λ_i 是正则整环，$0\leqslant i\leqslant s$. 因 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\max\limits_i\mathrm{gl.dim}\Lambda_i$，不妨设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda_0$.

如果 $\mathrm{t.dim}\Lambda=\mathrm{gl.dim}\Lambda$，先证 Λ_0 是局部环. 若 Λ_0 不是局部环，则 Λ_0 至少含有两个极大理想. 设 $m_0^{(1)},m_0^{(2)},\cdots,m_0^{(n)}$ 是 Λ_0 的全部极大理想，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_0=\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(1)}}\geqslant\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(n)}}$. 由命题 6.2.1 得

$$\mathrm{t.dim}\Lambda_0=\mathrm{gl.dim}\Lambda_0+\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}.$$

若 $\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}>0$，则 $m'=m_0^{(2)}\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_s$ 是 Λ 的一个极大理想，且

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m'}=\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}\leqslant\mathrm{gl.dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(1)}}=\mathrm{gl.dim}\Lambda_m,$$

其中 $m=m_0^{(1)}\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_s$. 又由命题 6.2.1 得

$$\mathrm{t.dim}\Lambda\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m'}$$

$$=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda+\mathrm{gl.\,dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}>\mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$$

这与 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda$ 矛盾，故 $\mathrm{gl.\,dim}(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}=0$. 又因 $(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}$ 是正则整环，故 $(\Lambda_0)_{m_0^{(2)}}$ 是域. 于是 $(m_0^{(2)})_{m_0^{(2)}}=0$. 这样，对 $y\in m_0^{(2)}$ 且 $y\neq 0$，必存在 $u\notin m_0^{(2)}$，使得 $uy=0$. 这与 Λ_0 是整环矛盾，所以 Λ_0 是局部环.

其次，证 $\Lambda_i(i>0)$ 是域. 因 Λ_0 是局部环，且 Λ 至少有两个极大理想，故 $s>0$. 若 Λ_1 不是域，则因 Λ_1 是整环，故知 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_1>0$. 设 m_1' 是 Λ_1 的一个极大理想，使得 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_1=\mathrm{gl.\,dim}(\Lambda_1)_{m_1'}$，则 $m'=\Lambda_0\oplus m_1'\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_s$ 是 Λ 的一个极大理想. 令 m_0 是 Λ_0 的唯一极大理想，则 $m=m_0\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_s$ 也是 Λ 的一个极大理想. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m'}&=\mathrm{gl.\,dim}(\Lambda_1)_{m_1'}=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_1\leqslant\mathrm{gl.\,dim}\Lambda\\&=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_0=\mathrm{gl.\,dim}(\Lambda_0)_{m_0}=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_m,\end{aligned}$$

所以由命题 6.1.1 得

$$\begin{aligned}\mathrm{t.\,dim}\Lambda&\geqslant\mathrm{gl.\,dim}\Lambda+\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_{m'}-\mathrm{gl.\,dim}\Lambda+\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_1\\&>\mathrm{gl.\,dim}\Lambda.\end{aligned}$$

这与 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda$ 矛盾，因此 Λ_1 是域. 同理，可以证明 $\Lambda_2,\cdots,\Lambda_s$ 也是域.

反过来，若 m_0' 是 Λ_0 的唯一极大理想，则 $m_0=m_0'\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_s$，$m_i=\Lambda_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_{i-1}\oplus F_{i+1}\oplus\cdots\oplus F_s(1\leqslant i\leqslant s)$ 是 Λ 的全部极大理想. 由命题 6.1.1 得

$$\mathrm{t.\,dim}\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda+0=\mathrm{gl.\,dim}\Lambda.$$

定理 6.2.3 给出了 Auslander-Buchsbaum 定理在正则半局部环成立的充要条件.

下面三个定理解决了 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda=1,2,3$ 的正则半局部环的结构. 这里，我们仅给出其结果，而详细证明可参考文献[105].

定理 6.2.4 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda=1$ 当且仅当 $\Lambda=\Lambda_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_s$，其中 Λ_0 是正则局部主理想整环，但 Λ_0 不是域，$F_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是域.

定理 6.2.5 $\mathrm{t.\,dim}\Lambda=2$ 当且仅当 Λ 是下列情形之一：

(i) $\Lambda=\Lambda_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_s$，其中 Λ_0 是整体维数为 2 的局部环，$F_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是域；

(ii) Λ 是有限个主理想整环的直和，并且至少有两个极大理想 m_0, m_1，使得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_i}=1, i=0,1$.

定理 6.2.6 $\mathrm{t.dim}\Lambda=3$ 当且仅当 Λ 是下列情形之一：

(i) $\Lambda=\Lambda_0\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_s$，其中 Λ_0 是局部环，$\mathrm{gl.dim}\Lambda_0=3$，$F_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是域；

(ii) $\Lambda=\Lambda_0\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_t$，其中 Λ_0 是正则整环，$\mathrm{gl.dim}\Lambda_0=2$，$\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 是主理想整环，并且，至少有某个 $\Lambda_i(i\geqslant 1)$ 不是域.

最后，我们进一步讨论 $\mathrm{t.dim}\Lambda=2$ 的环 Λ 的性质.

命题 6.2.7 设 $\mathrm{t.dim}\Lambda=2$，且 Λ 有两个极大理想 m_1, m_2，使得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}>0$. $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$，则 Λ 和它的完备环 $\hat{\Lambda}$ 都是主理想整环的直和.

证明 不妨设 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$，由命题 6.2.1 得

$$\begin{aligned}2=\mathrm{t.dim}\Lambda &\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>\mathrm{gl.dim}\Lambda\\ &\geqslant\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda=1$. 又由推论 6.1.9 知，Λ 是有限个主理想整环的直和. 另外，$\hat{\Lambda}$ 也是正则半局部环，且 $\mathrm{t.dim}\hat{\Lambda}=\mathrm{t.dim}\Lambda=2$. 设 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 是 Λ 的全部极大理想，则 $\hat{\Lambda}=\hat{\Lambda}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\hat{\Lambda}_{m_s}$. 因为 $(\hat{m}_1)_{m_1}$ 是 $\hat{\Lambda}_{m_1}$ 的唯一极大理想，$(\hat{m}_2)_{m_2}$ 是 $\hat{\Lambda}_{m_2}$ 的唯一极大理想，所以

$$m'=(\hat{m}_1)_{m_1}\oplus\hat{\Lambda}_{m_2}\oplus\cdots\oplus\hat{\Lambda}_{m_s},$$

$$m''=\hat{\Lambda}_{m_1}\oplus(\hat{m}_2)_{m_2}\oplus\hat{\Lambda}_{m_3}\oplus\cdots\oplus\hat{\Lambda}_{m_s}$$

是 $\hat{\Lambda}$ 的两个极大理想，并且适合

$$\begin{aligned}\mathrm{gl.dim}\hat{\Lambda}_{m'}&=\mathrm{gl.dim}(\hat{\Lambda}_{m_1})_{(\hat{m}_1)_{m_1}}=\mathrm{gl.dim}\hat{\Lambda}_{m_1}\\ &=\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}>0,\\ \mathrm{gl.dim}\hat{\Lambda}_{m''}&=\mathrm{gl.dim}(\hat{\Lambda}_{m_2})_{(m_2)_{m_2}}=\mathrm{gl.dim}\hat{\Lambda}_{m_2}\\ &=\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0.\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{t.dim}\hat{\Lambda}=2$，所以由命题 6.2.1 得 $\mathrm{gl.dim}\hat{\Lambda}=1$. 从而由推论 6.1.9 知 $\hat{\Lambda}$ 是有限个主理想整环的直和.

命题 6.2.8 设 Λ 是正则半局部环，且是主理想环. 若 Λ 有两个极大理想 m_1 和 m_2，使得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}>0$，$\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}>0$，则

$\mathrm{t.dim}\Lambda=2$.

证明 首先，Λ 是有限个整环的直和. 但 Λ 是主理想环，因此 Λ 是主理想整环的直和. 于是得 $\mathrm{gl.dim}\Lambda\leqslant 1$. 又因为 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}>0$，所以 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}=1$. 同样，也有 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}=1$. 故 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}\leqslant \mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_1}=\mathrm{gl.dim}\Lambda$. 继而由命题 6.2.1 可得

$$\mathrm{t.dim}\Lambda\geqslant \mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda_{m_2}=1+1=2.$$

但 $\mathrm{t.dim}\Lambda\leqslant \mathrm{gl.dim}\Lambda+\mathrm{gl.dim}\Lambda=2$，故 $\mathrm{t.dim}\Lambda=2$.

6.3 凝聚半局部环的同调维数

在第四章里，我们讨论了凝聚局部环，上面两节又介绍了 Noether 半局部环，从本节开始，我们将作进一步推广，研究凝聚半局部环及其模的同调维数. 这节里，首先讨论这类环的同调性质，特别是一些计算维数的基本法则.

首先，我们介绍有关非交换凝聚半局部环维数的一个重要定理.

引理 6.3.1 设 Λ 是任意环，A 是 f.p. 左 Λ-模，$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}A\longrightarrow 0$ 是正合列，$K\ll P$，则 K 是 f.g. 的.

证明 因 A 是 f.p. 左 Λ-模，故有 Λ-模正合列

$$0\longrightarrow H\xrightarrow{u}F\xrightarrow{v}A\longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模，H 是 f.g. 的. 考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & A & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (1)$$

这里 1_A 是恒等映射. 因为 g 是满同态，F 是投射模，所以存在同态 ψ: $F\rightarrow P$，使得 $g\psi=1_Av$. 又因为 $g\psi u=1_Avu=0$，所以存在同态 φ: $H\rightarrow K$，使得 $f\varphi=\psi u$. 但 $K\ll P$，故 ψ 是满同态. 由交换图(1)知，φ 也是满同态，故 $K=\varphi(H)$是 f.g. 的.

引理 6.3.2 设 Λ 是半局部环，A 是 f.p. 左 Λ-模，且 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0$，则 A 的每个满自同态是自同构.

证明 考虑左 Λ-模的正合列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{g}A\xrightarrow{f}A\longrightarrow 0,$$

其中 $K=\ker f$. 因 $f(JA)\subseteq Jf(A)\subseteq JA$，故 $\bar{f}: A/JA\to A/JA$，$x+JA\to f(x)+JA$是满自同态. 但 $\bar{A}=A/JA$ 是半单纯模，且具有有限长度，因此易知 $\bar{f}$ 是 $\bar{A}$ 的一个自同构.

对任意 $x\in\ker f$，因 $\bar{f}(\bar{x})=0$ 和 $\bar{x}=x+JA=\bar{o}$，即 $\ker f\subseteq JA\ll A$，故由引理 6.3.1 知 $K=\ker f$ 是 f.g. 的.

由于 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0$，因此得下面交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}0\longrightarrow & \Lambda/J\otimes_{\Lambda}K & \xrightarrow{1\otimes g} & \Lambda/J\otimes_{\Lambda}A & \xrightarrow{1\otimes f} & \Lambda/J\otimes_{\Lambda}A & \longrightarrow 0\\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & A/JA & \xrightarrow{\bar{f}} & A/JA & \longrightarrow 0\end{array}$$

其中行正合，垂直映射是同构. 因此，$1\otimes f$ 是一个自同构和 $\Lambda/J\otimes_{\Lambda}K\cong K/JK=0$. 最后，由 Nakayama 引理得 $K=0$. 因而 f 是 A 的自同构.

引理 6.3.3 设 Λ 是半局部环，左 Λ-模序列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{g}F\xrightarrow{f}A\longrightarrow 0 \qquad (2)$$

正合，其中 F 是 f.g. 投射模，K 是 f.p. 的，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0, i=1,2$；

(ii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^i(A,\Lambda/J)=0, i=1,2$；

(iii) A 是投射模；

(iv) A 是平坦模.

证明 (i)⇔(ii) 仿照定理 2.2.7 的证明方法，便知结论是成立的.

至于(iii)⇒(iv)⇒(i)，显然结论是成立的. 其次，由于(i)和(ii)是等价的，因此我们仅需证明(ii)推得(iii)成立.

因 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A,\Lambda/J)=0$，故得 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A,K/JK)=0$. 从而由(2)得正

合列

$$0\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,K/JK)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(F,K/JK)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,K/JK)\to 0. \tag{3}$$

令 $u:K\to K/JK$ 是自然同态，由正合列(3)知存在同态 $v:F\to K/JK$，使得 $u=vg$. 又因 u 是满同态和 F 是投射模，故又存在同态 $h:F\to K$，使得 $uh=v$. 于是 $uhg=vg=u$，$u(1-hg)=0$. 又令 $q=1-hg$，则 $1=q+hg$ 和 $K=q(K)+hg(K)$. 因 $uq(K)=0$，$q(K)\subseteq \ker u=JK\ll K$，故根据 Nakayama 引理得 $hg(K)=K$，即 hg 是 K 的满自同态. 另外，由(2)可得正合列

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/J,F)\to \mathrm{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/J,A)\to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,K)\to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,F).$$

因 $\mathrm{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/J,F)=\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,F)=0$，故

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J,K)\cong \mathrm{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/J,A)=0.$$

继而根据引理 6.3.2 知 hg 是 K 的一个自同构. 因此序列 $0\longrightarrow K\xrightarrow{g} F\xrightarrow{f} A\longrightarrow 0$ 是分裂正合的. 故 A 是投射模.

定理 6.3.4 设 Λ 是左凝聚半局部环，则

(i) $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_{n+i}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0, i=1,2$，$A$ 是任意 f.p. 左 Λ-模；

(ii) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{l.Id}_\Lambda(\Lambda/J)$.

证明 (i) 因 Λ 是左凝聚环，A 是 f.p. 的，故 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.pd}_\Lambda A$. 并且，若 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$，则显然有 $\mathrm{Tor}_{n+i}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$.

反过来，若 $n=0$，则因 Λ 是左凝聚环，且 A 是 f.p. 的，故有左 Λ-模的正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow F\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 的. 因 $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(R/J,A)=0, i=1,2$，故根据引理 6.3.3 知 A 是投射模，即 $\mathrm{l.fd}_\Lambda A=\mathrm{l.pd}_\Lambda A=0$. 若 $n\geqslant 1$，则有左 Λ-模正合列

$$0\longrightarrow K_1\longrightarrow P_n\xrightarrow{d_n} P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1} P_0\xrightarrow{\varepsilon} A\longrightarrow 0, \tag{4}$$

$$0\longrightarrow K_2\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow P_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow A\longrightarrow 0, \tag{5}$$

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_n \longrightarrow K_2 \longrightarrow 0, \tag{6}$$

这里每个 P_i 是 f.g. 投射模，$K_1=\ker d_n$ 和 $K_2=\ker d_{n-1}$ 是 f.p. 的. 继而由正合列(4)和(5)得

$$\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, K_1) \cong \mathrm{Tor}_{n+2}^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0,$$

$$\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, K_2) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0.$$

又由正合列(6)得正合列

$$\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(\Lambda/J, P_n) \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(\Lambda/J, K_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, K_1).$$

因为 $\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(\Lambda/J, P_n)=\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, K_1)=0$，所以 $\mathrm{Tor}_2^{\Lambda}(\Lambda/J, K_2)=0$. 再根据引理 6.3.3 知 K_2 是投射模，于是由(5)可得 $\mathrm{l.fd}_{\Lambda}A=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}A \leqslant n$.

(ii) 设 $\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=n<\infty$，$I$ 是 Λ 的任意 f.g. 左理想，由定理 2.2.1 得 $\mathrm{Tor}_{n+i}^{\Lambda}(\Lambda/J, \Lambda/I)=0, \forall\ i \geqslant 1$. 因 Λ/I 是 f.p. 的，故由(i)知 $\mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I) \leqslant n$. 但 Λ 是左凝聚环，因而有

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I) \mid \forall \text{ f.g. 左理想 } I\} \leqslant n.$$

故 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)$. 最后，因 Λ 是半局部环，故由定理 2.2.7 可得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)$.

由定理 6.3.4，可以直接得到定理 6.1.4. 另外，左 Noether 半局部环 Λ 上 f.g. 左 Λ-模 A 是投射模 $\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A, \Lambda/J)=0$. 因而由定理 6.3.4 又可以推得定理 6.1.2.

下面我们讨论交换凝聚半局部环.

命题 6.3.5* 设 Λ 是任意交换环，A 是 f.g. Λ-模，则 A 的任意满自同态必是自同构(文献[75]定理 3.6).

命题 6.3.6 设 Λ 是交换凝聚半局部环，A 是 f.p. Λ-模，则下列陈述等价：

(i) $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0$;

(ii) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(A, \Lambda/J)=0$;

(iii) A 是投射模；

(iv) A 是平坦模.

证明 由引理 6.3.3 的证明知，我们仍仅需由(ii)推得(iii)成立. 因 Λ 是凝聚环，A 是 f.p. Λ-模，故存在 Λ-模的正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f. g. 自由模，K 是 f. p. 的. 由 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda/J)=0$，仿照引理 6. 3. 3 的证明方法可知，存在同态 h：$F \to K$，使得 hg 是 K 的满自同态. 但 Λ 是交换环，根据命题 6. 3. 5，hg 是 K 的一个自同构. 因此序列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ 是分裂正合的. 故 A 是投射模.

定理 6. 3. 7 设 Λ 是交换凝聚半局部环，A 是 f. p. Λ-模，则

(i) $\mathrm{fd}_\Lambda A=\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0;$$

(ii) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/J)$.

如果 J 是 f. g. 的，则

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 (i) 应用命题 6. 3. 6 和仿照定理 6. 3. 4(i)的证明，便知结论成立.

(ii) 直接由定理 6. 3. 4 可以得到(ii).

推论 6. 3. 8 设 Λ 是交换凝聚半局部环，则

(i) 若 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)<\infty$，必有 $\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/J)$；

(ii) 若 J 是 f. g. 的，且 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)<\infty$，必有

$$\mathrm{f.f.p.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 由命题 2. 5. 8 和定理 6. 3. 7，便知结论(i)成立. 至于结论(ii)，由(i)知它成立是显然的.

推论 6. 3. 9 设 Λ 是交换凝聚半局部环，J 是 f. g. 的，A 是 f. p. Λ-模. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正规 A-序列，则

$$\mathrm{pd}_\Lambda[A/(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]=\mathrm{pd}_\Lambda A+n.$$

证明 仿照定理 3. 4. 1 的证明，再应用定理 6. 3. 7 便知结论成立.

现在我们应用上面的结果，研究有直因子 Λ/J 的 f. g. 模的同调维数问题. 这里称模 B 是模 A 的直因子，如果 $A\cong B\oplus C$.

引理 6. 3. 10 设 Λ 是交换凝聚半局部环，J 是 f. g. 的，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，$A$ 为 f. p. Λ-模.

(i) 若 Λ/J 同构于 A 的子模，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda A$；

(ii) 若 Λ/J 是 A 的同态象，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(A)$.

证明 (i) 令 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=n$，由定理 6.3.7 知 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)=n$. 因 Λ/J 同构于 A 的子模，故得正合列 $0\longrightarrow\Lambda/J\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow 0$. 设 $\mathrm{pd}_\Lambda A=m$，$\mathrm{pd}_\Lambda B=l$，由于 A 和 B 是 f.p. 的，$\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A$，$\mathrm{pd}_\Lambda B=\mathrm{fd}_\Lambda B$，因此 $n\geqslant m$ 和 $n\geqslant l$. 若 $n>m$，则 $l=n+1$. 这就导出矛盾，所以 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{pd}_\Lambda A$.

(ii) 因 Λ/J 是 A 的同态象，故得正合列 $0\to K\to A\to\Lambda/J\to 0$. 令 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=n$，由定理 6.3.7 知 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=n$. 因 Λ/J 是 f.p. 的，又由定理 6.3.7 得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda/J,\Lambda/J)\neq 0$. 从而由正合列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda/J,A)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda/J,\Lambda/J)\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/J,K)$$

知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Lambda/J,A)\neq 0$. 故 $\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A\geqslant n$. 但 Λ 是凝聚环，根据定理 2.5.5 知 $\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A\leqslant\mathrm{W.gl.dim}\Lambda$. 所以 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A$.

引理 6.3.11 设 Λ 是交换凝聚半局部环，则

$$\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

证明 设 A 是任意 f.p. Λ-模，m 是 Λ 的一个极大理想. 由于 Λ 是凝聚环，Λ/m 是内射 Λ/m-模，因此得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,A)&\cong\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\mathrm{Hom}_{\Lambda/m}(\Lambda/m,\Lambda/m),A)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda/m}(\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda/m),\Lambda/m).\end{aligned}$$

由于 Λ/m 是模范畴 $\mathscr{C}_{\Lambda/m}$ 的内射余生成元，因此 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/m,A)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A,\Lambda/m)=0$. 所以 $\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m)=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda/m)$.

因 Λ 是交换半局部环，$\Lambda/J=\bigoplus_{i=1}^m\Lambda/m_i$，故

$$\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J).$$

定理 6.3.12 设 Λ 是交换凝聚半局部环，J 是 f.g. 的. 若 Λ/J 是 f.p. Λ-模 A 的直因子，则 $\mathrm{fd}_\Lambda A=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A$.

证明 因 $A=\Lambda/J\oplus B$，故

$$\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda/J)\leqslant\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A,\ \mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)\leqslant\mathrm{fd}_\Lambda A.$$

若 $\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A<\infty$，则由定理 6.3.7 和引理 6.3.11 知 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda(\Lambda/J)<\infty$. 于是由引理 6.3.10 便得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda A=\mathrm{FP\text{-}Id}_\Lambda A.$$

若 FP-$\mathrm{Id}_\Lambda A=\infty$，假定 $\mathrm{fd}_\Lambda A<\infty$，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/J)<\infty$. 因此由引理 6.3.10 便知 FP-$\mathrm{Id}_\Lambda A<\infty$. 这就导出矛盾，所以 $\mathrm{fd}_\Lambda A=\infty$.

推论 6.3.13 设 Λ 是交换 Noether(半)局部环，若 Λ/J 是f.g. Λ-模 A 的直因子，则 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{Id}_\Lambda A$.

证明 由定理 2.1.1′ 知 $\mathrm{Id}_\Lambda A\leqslant n\Leftrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/I,A)=0,\forall$ Λ 的理想 I. 但 Λ 是 Noether 环,I 必是 f.g. 的,因而 Λ/I 为 f.p. Λ-模. 于是由命题 2.5.9 得 $\mathrm{Id}_\Lambda A=$FP-$\mathrm{Id}_\Lambda A$. 再由定理 6.3.12，就有 $\mathrm{pd}_\Lambda A=\mathrm{Id}_\Lambda A$.

最后，我们讨论 $\Lambda/m(\Lambda/J)$是某个有限内射维数的 f.g. Λ-模的直因子的环 Λ 的特征. 与 4.3 节相同，称交换环 Λ 是正则的,如果它的每个 f.g. 理想具有有限投射维数.

命题 6.3.14 设 Λ 是交换凝聚环，m 是 Λ 的一个 f.g. 极大理想，则下列陈述是等价的：

(i) FP-$\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/m)<\infty$;

(ii) Λ_m 是正则的.

证明 由命题 4.1.5 知 Λ_m 是交换凝聚局部环. 于是由定理 4.2.4 得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m=\mathrm{fd}_{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m)=\sup\{\mathrm{fd}_{\Lambda_m}(\Lambda/m)_{m'}\mid\forall\ m'\in\mathrm{Max}(\Lambda)\}.$$

因此，按引理 4.2.5 和引理 6.3.11 的证明,可得

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m=\mathrm{fd}_\Lambda(\Lambda/m)=\text{FP-}\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/m).$$

若 FP-$\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/m)<\infty$. 则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m<\infty$，故 Λ_m 是正则的. 另外，若 Λ_m 是正则的,则 FP-$\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/m)=\mathrm{fd}_{\Lambda_m}(\Lambda_m/m_m)<\infty$.

推论 6.3.15 设 Λ 是交换 Noether 环，则下列陈述是等价的：

(i) 存在一个 f.g. Λ-模 A，$\mathrm{Id}_\Lambda A<\infty$，且 Λ/m 是它的直因子，这里 m 是 Λ 的一个极大理想；

(ii) Λ_m 是有限整体维数的交换 Noether 局部环，即 Λ_m 是在 3.5 节定义下的正则局部环.

推论 6.3.16 设 Λ 是交换 Noether 半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) 存在一个 f.g. Λ-模 A，$\mathrm{Id}_\Lambda A<\infty$，且 Λ/J 是它的直因子；

(ii) Λ_m 是正则局部环，$\forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$；

(iii) $\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$.

证明 仅需证(iii)⇒(i). 由定理 6.1.4 知，$\mathrm{Id}_\Lambda(\Lambda/J)=\mathrm{gl.dim}\Lambda<\infty$. 故(i)是成立的.

6.4 不可分凝聚半局部环

我们知道交换半局部环可以分解为有限个不可分的半局部环，因此交换凝聚半局部环的结构性质与不可分的凝聚半局部环有着密切的联系. 本节主要讨论整体维数为 2 的不可分半局部环的同调性质，本节所指的环皆是交换环.

首先介绍交换凝聚半局部环的分解.

定理 6.4.1 设 Λ 是交换凝聚半局部环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，则 Λ 是有限个 GCD 整环的直和.

证明 首先，由定理 1.6.16 知，$\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是不可分半局部环. 因为 Λ 是凝聚环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，所以 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_i<\infty$ 且 Λ_i 是凝聚环，$1\leqslant i\leqslant n$. 从而每个 Λ_i 是有限弱整体维数的凝聚 FP－环. 继而由定理 4.5.2 可知每个 Λ_i 是 GCD 整环.

推论 6.4.2 设 Λ 是交换半局部环，J 是 f.g. 的，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是半遗传环；

(ii) Λ 是凝聚环且 J 是投射模；

(iii) $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，每个 Λ_i 是 Prüfer GCD 整环.

证明 (i)⇒(ii) 因 Λ 是半遗传环，故 Λ 是凝聚环且每个f.g. 理想是投射模. 所以 J 也是投射模.

(ii)⇒(iii) 因 J 是投射模，故由正合列 $0\to J\to\Lambda\to\Lambda/J\to 0$ 知 $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/J)\leqslant 1$. 又由定理 6.3.7 可得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 1$. 从而应用定理 6.4.1 可得 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是 GCD 整环，且 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_i\leqslant 1$. 所以 Λ_i 是 Prüfer GCD 整环.

(iii)⇒(i) 因 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是 Prüfer 整环，

故 Λ_i 是凝聚环，且 W. gl. dim$\Lambda_i \leqslant 1$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 从而 Λ 是凝聚环并且 W. gl. dim$\Lambda \leqslant 1$. 所以 Λ 是半遗传环.

命题 6.4.3 设 Λ 是任意交换半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) gl. dim$\Lambda \leqslant 1$；

(ii) Λ 是有限个主理想整环的直和.

证明 (i)⇒(ii) 因 $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是不可分的半局部环，故由 gl. dim$\Lambda \leqslant 1$ 知 Λ_i 是 FP-环，且 gl. dim$\Lambda_i \leqslant 1$. 故根据推论 4.5.4 知 Λ_i 是主理想整环，$1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii)⇒(i) 因 Λ_i 是主理想整环，故 gl. dim$\Lambda_i \leqslant 1$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 于是知 gl. dim$\Lambda \leqslant 1$.

下面讨论整体维数为 2 的不可分半局部环的结构和分类问题.

命题 6.4.4 设 Λ 是交换半局部环，A 是 Λ-模，则

(i) A 是 f. g.（可数生成）的⇔A_m 是 f. g.（可数生成）的，$\forall\, m \in$ Max(Λ)；

(ii) Λ 是 Noether（凝聚）环⇔Λ_m 是 Noether（凝聚）环，$\forall\, m \in$ Max(Λ).

证明 (i) 仅需证充分性. 设 $m_1, m_2, \cdots, m_t$ 是 Λ 的所有极大理想，A_{m_i} 是 f. g. Λ_{m_i}-模，$1 \leqslant i \leqslant t$. 令 $X_i = \left\{ \frac{x_{i_t}}{1} \middle| i_t \in T_i \right\}$ 是 A_{m_i} 的有限生成集，则 $X = \biguplus_{i=1}^{t} X_i$ 和 $T = \biguplus_{i=1}^{t} T_i$ 也是有限集，这里 $\biguplus$ 表示不相交的并. 定义 $f: \Lambda^{(T)} \to A$ 使 $f(e_{i_t}) = x_{i_t}$，这里 e_{i_t} 是 $\Lambda^{(T)}$ 中第 i_t 个坐标为 1 且其他坐标为 0 的元素. 显然，f 是一个 Λ-同态，且 $f_{m_i}: \Lambda_{m_i}^{(T)} \to A_{m_i}$ 是满射. 因此 f 是一个满射. 故 A 是 f. g. 的.

类似地，对于可数生成的情形，结论也成立.

(ii) 直接由(i)可推得(ii)成立.

命题 6.4.5* 设 Λ 是整体维数为 2 的交换局部环，则 Λ 的每个理想是可数生成的（文献[85]定理 4.8）.

定理 6.4.6 设 Λ 是不可分交换半局部环，gl. dim$\Lambda = 2$，则

(i) Λ 是凝聚 GCD 整闭整环；

(ii) Λ 的每个理想是可数生成的；

(iii) Λ 必是下面一类环之一：

(1,2,3)-环，(2,2,0)-环，(2,2,3)-环.

证明 (i) 因不可分半局部环是FP-环，且 gl. dim$\Lambda=2$，故由引理 4.6.5 知 Λ 是凝聚环. 因而由定理 4.5.2 可知 Λ 是 GCD 整环.

其次，设 Q 是 Λ 的商域，$q=\frac{b}{a}\in Q$，记 $\delta=[a,b]$，则 $q=\frac{\beta}{\alpha}$，这里 $a=\delta\alpha, b=\delta\beta$. 考虑 Λ-模正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow \Lambda^{(2)}\xrightarrow{\varphi}(a,b)\longrightarrow 0,$$

其中 $\varphi(1,0)=a$，$\varphi(0,1)=-b$，$K=\ker\varphi$. 因 Λ 是凝聚环，故 K 是 f.g. 的，且(β,α)是 K 的生成元. 若存在 $\lambda,\gamma\in\Lambda$，使得 $\lambda\alpha-\gamma\beta=0$，则 $\lambda a-\gamma b=0$. 因此 $(\lambda,\gamma)\in\ker\varphi$. 故 $(\lambda,\gamma)=t(\beta,\alpha)$. 从而 $\lambda\in(\beta)$，$\gamma\in(\alpha)$.

若 q 在 Λ 上整，即有 $a_0+a_1q+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}+q^n=0$，$a_i\in\Lambda,0\leqslant i\leqslant n$，则得 $\beta^n=-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}\beta+\cdots+a_{n-1}\alpha\beta^{n-1})$. 从而 $\beta^{n-1}\cdot\beta=s\alpha$. 因此 $\beta^{n-1}\in(\alpha)$，…，$\beta\in(\alpha)$. 由于$[\alpha,\beta]=1$，因此 α 是单位. 从而 $q\in\Lambda$. 故 Λ 是整闭的.

(ii) 因 gl. dim$\Lambda_m\leqslant$gl. dim$\Lambda=2,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，故由命题 6.4.5 知 Λ_m 的每个理想是可数生成的. 从而由命题 6.4.4 知 Λ 的每个理想是可数生成的.

(iii) 由定理 4.6.7 可直接得知结论成立.

整体维数为 2 的不可分半局部环是一类特殊的$(a,2,b)$-FP 环，在 4.6 节中对一般的$(a,2,b)$-FP 环的分类已进行详细的研究，这里我们对$(a,2,b)$-不可分半局部环的分类问题再进行一些讨论.

定理 6.4.7 设 Λ 是不可分交换半局部环，且 gl. dim$\Lambda=2$，则

(i) Λ 是(1,2,3)-环$\Leftrightarrow\Lambda$ 的每个极大理想是主理想，或者是非 f.g. 的$\Leftrightarrow\Lambda$ 是 Bèzout 整环.

(ii) Λ 是(2,2,0)-环$\Leftrightarrow\Lambda$ 满足主理想升链条件$\Leftrightarrow\Lambda$ 是 Noether 环.

(iii) 若 J 为 f.g. 的，则 Λ 是(2,2,3) 环$\Leftrightarrow$存在一个极大理想，它不是主理想，且 Λ 不是完全整闭的.

证明 (i) 若 Λ 是(1,2,3)-环，则由引理 4.6.9 知 Λ 是 Bèzout

整环. 因而 Λ 的每个极大理想是主理想,否则是非 f.g. 的.

反过来，若 Λ 的每个极大理想是主理想，或者是非 f.g. 的，则由命题 6.4.4 知 Λ_m 也具有此性质，这里 m 是 Λ 的任意极大理想. 于是 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \leqslant 1, \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)$.

$\therefore\quad \mathrm{W.gl.dim}\Lambda = \sup\{\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m \mid \forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)\} \leqslant 1.$

但 $\mathrm{gl.dim}\Lambda = 2$，故 Λ 是(1,2,3)-环.

(ii) 显然 Λ 是(2,2,0)-环当且仅当 Λ 是 Noether 环. 现在假设 Λ 满足主理想升链条件，我们仅需证 Λ 的每个素理想是f.g. 的. 令 P 是 Λ 的一个素理想，因 Λ 是 GCD 整环且满足主理想升链条件，故 Λ 是唯一分解整环. 从而若 P 是极大理想，则必存在元素 $x \in P$ 使得 $P=(x)$；若 P 不是极大理想，则因 Λ 是凝聚 GCD 整环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda = 2$，故对 $a,b \in P$，有 $[a,b] \in P$. 令 $S=\{(a) \mid a \in P\}$，S 关于集合包含关系构成一个偏序集. 由 Zorn 引理知 S 含有一个极大元 (b). 又对任意 $a \in P$，必存在 $c \in P$ 使得 $b \in (c)$ 和 $a \in (c)$. 故由 (b) 的极大性得 $(b)=(c)$. 所以 $P=(b)$. 这样，Λ 的每个素理想均是 f.g. 的. 因此由 Cohen 定理知 Λ 是 Noether 环.

(iii) 若 Λ 是(2,2,3)-环,则由(i)知存在 Λ 的一个极大理想，它不是主理想. 因而我们仅需证明 Λ 不是完全整闭的. 若 Λ 是完全整闭的，则 Λ_m 也是完全整闭的，$\forall\ m \in \mathrm{Max}(\Lambda)$. 显然, $\mathrm{gl.dim}\Lambda_m \leqslant 2$. 故当 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_m \leqslant 1$ 时, Λ_m 是遗传整环，即 Dedekind 环. 因此 Λ_m 是 Noether 环. 当 $\mathrm{gl.dim}\Lambda_m = 2$ 时，若 m 是主理想，则由(i)知 Λ_m 是(1,2,3)-环. 于是 Λ_m 是完全整闭的赋值整环. 因此 $\dim\Lambda_m \leqslant 1$. 所以 Λ_m 是 Noether 环. 若 m 不是主理想，则 Λ_m 仍是 Noether 环. 于是由命题 6.4.4 知 Λ 是 Noether 环. 这与 $\mathrm{Ng.dim}\Lambda = 3$ 矛盾，所以 Λ 不是完全整闭的.

反之,显然 Λ 非(1,2,3)-环. 又因 Λ 是 GCD 整闭整环,故若 Λ 为(2,2,0)-环,则 Λ 是整闭 Noether 整环. 从而 Λ 是完全整闭的. 这就导出矛盾,故 Λ 必是(2,2,3)-环.

定理 6.4.8 设 Λ 是任意交换半局部环，且 $\mathrm{gl.dim}\Lambda = 2$，则 Λ 是有限个凝聚 GCD 整闭整环的直和.

证明　首先有 $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，其中每个 Λ_i 是不可分半局部环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_i\leqslant 2$. 若 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_i=2$，则由定理 6.4.6 知 Λ_i 是凝聚 GCD 整闭整环. 若 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda_i=1$，则由命题 6.4.3 知 Λ_i 是主理想整环. 因此 Λ_i 是 Noether 唯一分解整闭整环.

推论 6.4.9　设 Λ 是任意交换半局部环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，则 Λ 是凝聚环.

推论 6.4.10　设 Λ 是任意交换半局部环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，$I$ 是 Λ 的 f.g. 理想，则下列陈述是等价的：

(i) I 是投射模；

(ii) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J, I)=0$；

(iii) $\mathrm{Ext}_1^\Lambda(I, \Lambda/J)=0$.

证明　由推论 6.4.9 知 Λ 是凝聚环. 因而 Λ 的 f.g. 理想 I 是 f.p. 的. 于是由命题 6.3.6，结论是成立的.

推论 6.4.11　设 Λ 是不可分交换半局部环，且 $\mathrm{gl.\,dim}\Lambda=2$，则 f.g. 理想 I 是自由模$\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J, I)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_\Lambda^1(I, \Lambda/J)=0$.

证明　由推论 6.4.10 和定理 1.6.15 即可推得.

6.5　半完全环和完全环的同调维数

半完全环和完全环都是半局部环. Bass 在文献[12]中对完全环进行了研究，给出了完全环结构的同调刻画. 本节将介绍这两类环的同调性质.

首先，我们讨论半完全环.

定理 6.5.1　设 Λ 是半完全环，A 是 f.p. 左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/J, A)=0$；

(ii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, \Lambda/J)=0$；

(iii) A 是投射模；

(iv) A 是平坦模.

证明　因 Λ 是半局部环，故(i)$\Leftrightarrow$(ii)成立. 我们仅需再证(ii)$\Rightarrow$

(iii). 由定理 1.7.6 知半完全环是左半完全的，因此 A 有投射复盖. 于是得 Λ-模正合列

$$0 \to K \to P \to A \to 0, \tag{1}$$

其中 P 是 f.g. 投射模，K 是 f.g. 的，且 $K \subseteq JP$. 又因 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, \Lambda/J) = 0$，故由(1)又得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda/J) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda/J) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K, \Lambda/J) \to 0.$$

但 $K \subseteq JP$，因而对任意 $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda/J)$ 有 $f(K) \subseteq f(JP) = Jf(P) = 0$，即 $f|K = 0$. 另外，设 $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(K, \Lambda/J)$，又有 $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda/J)$，使得 $g = f|K$. 于是得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(K, \Lambda/J) = 0$. 因 K 是 f.g. 的，Λ/J 是半单环，故 $K = 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 是投射模.

定理 6.5.2 设 Λ 是左凝聚半完全环，A 是 f.p. 左 Λ-模，则

$$\mathrm{l.fd}_\Lambda A = \mathrm{l.pd}_\Lambda A \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J, A) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, \Lambda/J) = 0.$$

证明 应用定理 6.5.1，并仿照定理 6.3.4 的证明方法，便推得结论成立.

定义 设 Λ 是任意环，M 是左 Λ-模. 若 M 包含唯一的极大子模，则称 M 为局部模.

显然，每个单纯模是局部模，而每个局部模是循环模，并且局部模的同态象也是局部的. 令 X 表示所有局部左 Λ-模组成的类，下面这个定理证明半完全环的整体维数是由 X 中的局部模的投射维数决定的.

首先，我们需要证明一个引理.

引理 6.5.3 设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模，$\{A_i | i \in I\}$ 和 $\{B_i | i \in I\}$ 是 A 的两个子模族，I 是一个良序集，$\leqslant$ 表示这个次序关系，并且还满足以下条件：

(i) $B_i \subseteq A_i, \forall\, i \in I$;

(ii) $A_i \subseteq B_j, \forall\, i < j$;

(iii) 若 $x \in B_j$ 且 $x \neq 0$，必有某个 $i < j$，使得 $x \in A_i$;

(iv) $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A_i/B_i) \leqslant n, \forall\, i \in I$.

则 A 的包含所有 A_i 的极小子模的投射维数至多等于 n.

证明 首先,由(i)和(ii)知,当 $i<j$ 时,有 $B_i\subseteq A_i\subseteq B_j\subseteq A_j$. 因而 $A_i\subseteq A_j$ 且 $B_i\subseteq B_j$. 不失一般性,假定 A 就是包含所有 A_i 的极小子模,因此 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$.

对 n 作数学归纳法. 若 $n=0$,则由 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A_i/B_i)\leqslant 0$ 知 A_i/B_i 是投射模,$\forall\, i\in I$. 考虑 Λ-模正合列

$$0\to B_i\to A_i\to A_i/B_i\to 0.$$

因 A_i/B_i 是投射模,这个序列是分裂正合的,故 $A_i=B_i\oplus C_i$,这里 C_i 是 A_i 的子模,$C_i\cong A_i/B_i$. 我们证明 $A=\bigoplus_{i\in I}C_i$. 首先,A 中每个元素必可表成 $\sum^f c_j$,$c_j\in C_j$,f 表示有限和. 反之,因 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$,故必有一些 A_j 至少含有一个元素不能表成 c_i 的有限和. 令 A_i 是这些 A_j 中的一个,且按照次序$\leqslant$来说 A_i 是最小者. 假定 $x\in A_i$,x 不能表成 c_i 的有限和,因 $A_i=B_i\oplus C_i$,故 $x=y+c_i$,$c_i\in C_i$,$y\in B_i$ 且 $y\neq 0$. 由(iii)知存在某个 j,$j<i$ 且 $x\in A_j$. 又由 A_i 的选择可知,y 必可以表成有限个 c_k 的和. 因而 x 也可以表成有限个 c_k 的和,这就导出矛盾. 所以 $A=\sum_{i\in I}C_i$. 其次,若 $c_{j_1}+c_{j_2}+\cdots+c_{j_s}=0$,这里 $j_1<j_2<\cdots<j_s$ 且每个 $c_{j_t}\neq 0$,$1\leqslant t\leqslant s$,则由(ii)得 $c_{j_1}+c_{j_2}+\cdots+c_{j_{s-1}}\in B_{j_s}$,$c_{j_s}\in C_{j_s}$. 但 $B_{j_s}+C_{j_s}$ 是直和,因而 $c_{j_s}=0$,与 $c_{j_s}\neq 0$ 矛盾. 所以 $A=\bigoplus_{i\in I}C_i$,且每个 C_i 是投射模. 因此 A 是投射模.

若 $n\geqslant 1$,令 F,G_i 和 H_i 分别是由 A,A_i 和 B_i 的全体非零元为基的自由模,定义 $f:F\to A$ 使 $\sum^f\lambda_i x_i\mapsto\sum^f\lambda_i x_i$,这里 $\lambda_i\in\Lambda$,左端 x_i 是自由模 F 的基中元素,右端 x_i 表示模 A 中元素. 易知 f 是一个 Λ-满同态,且 $f_i=f|G_i:G_i\to A_i$ 和 $g_i=f|H_i:H_i\to B_i$ 是 Λ-满同态. 记 $M=\ker f$,$K_i=\ker f_i$,$L_i=\ker g_i$,则 $K_i=M\cap G_i$,$L_i=M\cap H_i$,且 $L_i\subseteq K_i\subseteq M$. 于是 $\{K_i\mid i\in I\}$ 和 $\{L_i\mid i\in I\}$ 是 M 的两个子模族,并且满足(i),易知也可满足(ii)和(iii). 考虑以下交换图(2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & H_i & \xrightarrow{g_i} & B_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & G_i & \xrightarrow{f_i} & A_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_i/L_i & \xrightarrow{\psi} & G_i/H_i & \xrightarrow{\varphi} & A_i/B_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \qquad (2)$$

其中各列皆正合，上面两行皆正合，且 $\varphi\psi=0$. 由交换图(2)易知序列

$$0 \longrightarrow K_i/L_i \xrightarrow{\psi} G_i/H_i \xrightarrow{\varphi} A_i/B_i \longrightarrow 0$$

也是正合的. 因 G_i/H_i 是自由模，$\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(A_i/B_i)\leqslant n$，故 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(K_i/L_i)\leqslant n-1, \forall\ i\in I$，即条件(iv)也成立. 由归纳法假设得

$$\begin{aligned}
\mathrm{l.\,pd}_\Lambda M &= \mathrm{l.\,pd}_\Lambda(M\cap F)=\mathrm{l.\,pd}_\Lambda[M\cap(\mathrm{U}_{i\in I}G_i)] \\
&= \mathrm{l.\,pd}_\Lambda[\mathrm{U}_{i\in I}(M\cap G_i)]=\mathrm{l.\,pd}_\Lambda[\mathrm{U}_{i\in I}K_i] \\
&\leqslant n-1.
\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A\leqslant n$.

定理 6.5.4 设 Λ 是半完全环，则

$$\mathrm{l.\,gl.\,dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.\,pd}_\Lambda M \mid \forall\ M\in X\},$$

其中 X 表示所有局部左 Λ-模组成的类.

证明 设 $\sup\{\mathrm{l.\,pd}_\Lambda M \mid \forall\ M\in X\}=n\leqslant\infty$，由定理 2.3.1 知 $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\Lambda=\sup\{\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A \mid \forall$ 循环左 Λ-模$\}$. 因而仅需证明 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda A\leqslant n$，这里 A 是任意循环左 Λ-模. 首先，有 Λ-满同态 $f:\Lambda\dot{\rightarrow}A$. 因 Λ/J 是半单环，故由命题 1.7.4 得 ${}_\Lambda\Lambda=\Lambda e_1\oplus\Lambda e_2\oplus\cdots\oplus\Lambda e_t$，其中 $\{e_1,e_2,\cdots,e_t\}$ 是 Λ 的完全正交幂等元集，且每个 Λe_i 是局部的.

令 $A_i=f(\Lambda e_i)$，则 $A_i\in X$，$A=A_1+\cdots+A_t$. 设 $B_i=A_1+A_2+\cdots+A_i$，$B_i'=A_1+A_2+\cdots+A_{i-1}$ 和 $B_1'=0$，则 $B_i'\subseteq B_i, \forall\ i$. 若 $i<j$，则 $B_i\subseteq B_j'$；并且，对任意 $x\in B_j', x\neq 0$，必有某个 i 使得 $i<j$ 和 $x\in B_i$. 因 $B_i/B_i'\cong A_i/B_i'\cap A_i\in X$，故 $\mathrm{l.\,pd}_\Lambda(B_i/B_i')\leqslant n, \forall\ i$. 由引理 6.5.3 得

$$\text{gl.}\dim\Lambda=\sup\{\text{l.}\,\text{pd}_\Lambda M\mid\forall\ M\in X\}.$$

下面我们讨论完全环，主要参考了文献[12],[77]和[108].

定理 6.5.5*(Bass) 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左完全环；

(ii) 对任意左 Λ-模 A，皆有 $\text{l.}\,\text{fd}_\Lambda A=\text{l.}\,\text{pd}_\Lambda A$；

(iii) 投射维数$\leqslant n$ 的左 Λ-模正向极限的投射维数$\leqslant n$.([文献 12] 定理 P)

定理 6.5.6 设 Λ 是左完全环，A 是左 Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\text{Tor}_{n+1}^\Lambda(\Lambda/J,A)=0$;

(ii) $\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(A,\Lambda/J)=0$;

(iii) $\text{l.}\,\text{pd}_\Lambda A\leqslant n$;

(iv) $\text{l.}\,\text{fd}_\Lambda A\leqslant n$.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 因 Λ/J 是半单环，由定理 2.2.7 的证明，即可推得结论是成立的.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) 由定理 6.5.5 知结论是成立的.

由(iv)推(i)是显然的，因而仅需再由(i),(ii)推(iv)成立. 设 B 是任意右 Λ-模，我们用超限归纳法来构造$\{B_i\}$. 令 $B_0=0$，$B_1=\text{Soc}(B)$. 对任意序数 i，若 i 不是极限序数，令 B_i 是 B 的子模，且 $B_i/B_{i-1}=\text{Soc}(B/B_{i-1})$；若 i 是极限序数，令 $B_i=\bigcup\limits_{j<i}B_j$. 由超限归纳法构造原理可知这样构造的$\{B_i\}$是完全确定的. 因 Λ 是左完全环，故由定理 1.7.12 知每个 $\text{Soc}(B/B_i)\neq 0$. 所以当 $j<i$ 时，$B_j\subset B_i$. 因此存在序数 i_0 使 $B_{i_0}=B$.

现在用超限归纳法证明 $\text{Tor}_{n-1}^\Lambda(B_i,A)=0,\forall\ i$. 若 $i=0$，$B_0=0$，则显然有 $\text{Tor}_{n+1}^\Lambda(B_0,A)=0$. 设 $j<i$，对任何序数 j 都有 $\text{Tor}_{n+1}^\Lambda(B_j,A)=0$. 当 i 不是极限数时，作正合列

$$0\to B_{i-1}\to B_i\to B_i/B_{i-1}\to 0. \tag{3}$$

因 $B_i/B_{i-1}=\text{Soc}(B/B_{i-1})$是半单纯的，故得 $B_i/B_{i-1}\cong\bigoplus\limits_k S_k$，这里每个 S_k 是单纯右 Λ-模. 但 Λ/J 是半单环，因此 $\Lambda/J\cong S_k\oplus S_k'$. 于是由

$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/J,A)=0$，得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(S_k,A)=0,\forall\ k$. 所以

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i/B_{i-1},A)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\bigoplus_k S_k,A)\cong\bigoplus_k\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(S_k,A)=0.$$

又由归纳假设得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_{i-1},A)=0$. 因而由正合列(3)得正合列

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_{i-1},A)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i,A)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i/B_{i-1},A).$$

故 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i,A)=0$. 当 i 是极限数时，因为 $B_i=\bigcup_{j<i}B_j=\varinjlim B_j$，所以

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i,A)=\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\varinjlim B_j,A)\cong\varinjlim\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_j,A)=0.$$

因此由归纳法原理，对任何序数 i 都有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B_i,A)=0$. 特别地 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(B,A)=0$. 所以 $\mathrm{l.fd}_{\Lambda}A\leqslant n$.

定理 6.5.7 (i) 设 Λ 是左完全环，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J).$$

(ii) 设 Λ 是左、右完全环，则

$$\begin{aligned}\mathrm{l.gl.dim}\Lambda&=\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{r.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)\\&=\mathrm{l.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)\\&=\mathrm{l.fd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{r.Id}_{\Lambda}(\Lambda/J),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\mathrm{gl.dim}\Lambda<n&\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(\Lambda/J,\Lambda/J)=0\\&\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_{n}^{\Lambda}(\Lambda/J,\Lambda/J)=0.\end{aligned}$$

证明 仿照定理 6.1.4 的证明方法，便知结论是成立的.

命题 6.5.8 设 Λ 是左完全环，$I\subseteq J$ 是 Λ 的理想，则

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)+\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I).$$

证明 因 Λ 是左完全环，故由定理 1.7.7 知 J 是左 T-幂零的. 所以 $I\subseteq J$ 也是左 T-幂零的. 从而由定理 2.3.10 得

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant\mathrm{l.gl.dim}(\Lambda/I)+\mathrm{r.fd}_{\Lambda}(\Lambda/I).$$

6.6 弱半局部环

这一节里，我们将讨论比半局部环更广泛的一种环类——弱半局部环，给出一个交换环是弱半局部环的充要条件，并把半局部的同调

性质作进一步推广．本节所指的环均是交换环，J 仍表示环的 Jacobson 根．

定义 设 Λ 是交换环，若 Λ/J 是 VN 正则环，则称 Λ 为弱半局部环．

显然，每个半局部环是弱半局部环．由于任何一个非半单 Artin 的 VN 正则环皆不是半局部环，因此弱半局部环类比半局部环类范围更宽．

命题 6.6.1 设 Λ 是弱半局部环，则 Λ 是半局部环当且仅当 Λ/J 有有限不可分分解．

证明 若 Λ 是半局部环，则 Λ/J 是半单环．故 Λ/J 有有限不可分分解．反过来，若 $\Lambda/J=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$，这里每个 Λ_i 皆是不可分的，则对任意一个 Λ_i，如果 $0\neq x\in\Lambda_i$，因 Λ/J 是 VN 正则环，由定理 1.4.13 知存在幂等元 $e\in\Lambda/J$，使得 $x(\Lambda/J)=e(\Lambda/J)$．但 $x(\Lambda/J)=x\Lambda_i\subseteq\Lambda_i$，故 $e\in\Lambda_i$．因为 Λ_i 是不可分的，所以 e 是 Λ_i 的单位元．于是得 $x\Lambda_i=x(\Lambda/J)=e(\Lambda/J)=\Lambda_i$．因此 x 是 Λ_i 的一个可逆元．故 Λ_i 是除环．从而 Λ/J 是半单环．所以 Λ 是半局部环．

定理 6.6.2 设 Λ 是交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是弱半局部环；

(ii) $J_m=m_m,\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$；

(iii) 包含 J 的素理想皆是极大理想．

证明 (i)⇒(iii) 设 P 是包含 J 的一个素理想，则存在 Λ 的一个极大理想 m，使得 $P\subseteq m$．若 $P\neq m$，则在环 $\bar{\Lambda}=\Lambda/J$ 中存在元素 $x\in\bar{m}-\bar{P}$．因此 x 在 $\bar{\Lambda}$ 中的零化子 $l_{\bar{\Lambda}}(x)\subseteq\bar{P}\subseteq\bar{m}$．因 $\bar{\Lambda}$ 是 VN 正则环，故存在幂等元 $e\in\bar{\Lambda}$，使得 $x\bar{\Lambda}=e\bar{\Lambda}\subseteq\bar{m}$，于是 $e\in\bar{m}$．但又有 $1-e\in l_{\bar{\Lambda}}(x)\subseteq\bar{m}$，因此 $e,1-e\in\bar{m}$．这就导出矛盾，所以 $P=m$．

(iii)⇒(ii) 设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，由(iii)知 $\bar{m}=m/J$ 是 $\bar{\Lambda}=\Lambda/J$ 的极小素理想．从而 $\bar{m}_m$ 是 Λ_m 的极小素理想．因局部环 $\bar{\Lambda}_m$ 只有一个极大理想，故 $\bar{m}_m$ 是 $\bar{\Lambda}_m$ 仅有的一个素理想．因此 $\bar{m}_m$ 由幂零元组成．于是对任意 $x\in\bar{m}$，存在 $n>0$，使得在环 $\bar{\Lambda}_m$ 中 $\frac{x^n}{1}=0$．因而存在 $\lambda\in\Lambda$，且 $\bar{\lambda}$

$\notin \overline{m}$，使 $\overline{\lambda}x^n=0$. 从而$(\overline{\lambda}x)^n=0$. 但 J 是 Λ 中一切包含 J 的素理想的交，故 $\overline{\Lambda}=\Lambda/J$ 的幂零元为 0. 因此 $\lambda x=\overline{\lambda}x=0$. 但 $\overline{\lambda}\notin\overline{m}$，故 $\lambda\notin m$. 于是在环 Λ_m 中 $\frac{\lambda}{1}$ 是可逆元，并由 $\frac{\lambda x}{1}=0$ 得 $\frac{x}{1}=0$. 因此 $(m/J)_m=\overline{m}_m=0$. 从而 $J_m=m_m$.

(ii)$\Rightarrow$(i) 对任意 $m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$，由(ii)知 $J_m=m_m$，即 $\overline{m}_m=(m/J)_m=0$. 因此对 $x\in\overline{m}$，存在 $\lambda\in\Lambda-m$，使 $\lambda x=0$. 由于 $\lambda\notin m$，因此 $\overline{\lambda}\notin\overline{m}$，即 $\frac{\overline{\lambda}}{1}$ 是 $\overline{\Lambda}_m$ 的可逆元. 又在环 $\overline{\Lambda}_m$ 中，$\frac{\overline{\lambda}}{1}\frac{x}{1}=\frac{\overline{\lambda}x}{1}=0$，且 $\frac{\overline{\lambda}}{1}$ 可逆，故 $\frac{x}{1}=0$. 因此 $\overline{m}_{\overline{m}}=0$，即 $\overline{\Lambda}_m$ 是除环. 于是对任意 $\overline{\Lambda}$-模 A，A_m 是平坦 $\overline{\Lambda}_m$-模. 从而 A 也是平坦 $\overline{\Lambda}$-模. 因此由定理 1.4.13 就得 $\overline{\Lambda}=\Lambda/J$ 是 VN 正则环，即 Λ 是弱半局部环.

推论 6.6.3 设 Λ 是弱半局部环，I 是它的理想. 若 $J\subseteq I$，则

(i) 对任意 $m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$，$I\cap m=Im+J$；

(ii) I 是 Λ 中一切包含 I 的极大理想的交.

证明 (i) 设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，由定理 6.6.2 知 $J_m=m_m$. 故 $m_m\subseteq I_m$. 于是$(I\cap m)_m=I_m\cap m_m=m_m$，$(Im+J)_m=I_m m_m+J_m=m_m$. 因此$(I\cap m)_m=(Im+J)_m$. 另外，若 $N\in\mathrm{Max}(\Lambda)$且 $N\neq m$，当 $I\nsubseteq N$ 时，则$(I\cap m)_N=I_N\cap m_N=\Lambda_N\cap\Lambda_N=\Lambda_N$，$(Im+J)_N=I_N m_N+J_N=\Lambda_N\Lambda_N+J_N=\Lambda_N$；当 $I\subseteq N$ 时，则$(I\cap m)_N=I_N\cap m_N=I_N\cap\Lambda_m=I_N$，$(Im+J)_N=I_N m_N+J_N=I_N\Lambda_N+J_N=I_N$.

综合以上讨论可知，$\forall N\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，$(I\cap m)_N=(Im+J)_N$. 故 $[(I\cap m)/(Im+J)]_N=0$. 因此$(I\cap m)/\mathrm{Im}+\mathrm{J})=0$. 所以 $I\cap m=Im+J$.

(ii) 设 $x\in\Lambda$，若有某个正整数 n 使 $x^n\in I$，则因 $\overline{\Lambda}=\Lambda/J$ 是 VN 正则环，故存在幂等元 $e\in\overline{\Lambda}$，使得 $\overline{x}\overline{\Lambda}=e\overline{\Lambda}$. 因此 $\overline{x}^n\overline{\Lambda}=e^n\Lambda=e\overline{\Lambda}=\overline{x}\overline{\Lambda}$. 故 $x\in I$. 从而 $x\in I$. 于是 I 与它的根 $r(I)$是相等的. 从而 I 是 Λ 中一切包含 I 的素理想的交. 再由定理 6.6.2 知 I 是 Λ 中一切包含 I 的极大理想的交.

下面讨论弱半局部环的同调性质.

定理 6.6.4 设 Λ 是凝聚弱半局部环，A 是 f. p. Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{pd}_\Lambda A \leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0$；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)=0, \forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$.

证明 (i)⇒(ii) 结论显然是成立的.

(ii)→(iii) 设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，则$\forall\ N\in\mathrm{Max}(\Lambda)$有

$$\mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)_N \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda_N}(\Lambda_N/m_N, A_N).$$

当 $N\neq m$ 时，因 $\Lambda_N/m_N=\Lambda_N/\Lambda_N=0$，故

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)_N=\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda_N}(\Lambda_N/m_N, A_N)=0.$$

当 $N=m$ 时，由定理 6.6.2 知 $J_m=m_m$. 故 $\Lambda_m/m_m=(\Lambda/J)_m$. 于是又得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)_m &= \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda m}((\Lambda/J)_m, A_m)\\ &= \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/J, A)_m=0.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)=0$.

(iii)⇒(i) 因 Λ 是凝聚环，A 是 f. p. 的，故有 Λ-正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0, \tag{1}$$

这里每个 P_i 是 f. g. 投射模，K 是 f. p. 的.

设 $m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$，则又得正合列

$$0\to K_m\to(P_{n-1})_m\to\cdots\to(P_1)_m\to(P_0)_m\to A_m\to 0. \tag{2}$$

因 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)=0$，故

$$0=\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/m, A)_m=\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda m}(\Lambda_m/m_m, A_m).$$

因 Λ_m 是凝聚局部环，A_m 是 f. p. Λ_m 模，故根据定理 4.2.2 得 $\mathrm{pd}_{\Lambda_m}A_m \leqslant n$. 从而由(2)知 K_m 是投射 Λ_m-模，$\forall\ m\in\mathrm{Max}(\Lambda)$. 于是 K 是平坦 Λ-模. 但 K 是 f. p. 的，故 K 是投射 Λ-模. 再由(1)就得 $\mathrm{pd}_\Lambda A\leqslant n$.

推论 6.6.5 设 Λ 是凝聚弱半局部环，A 是 f. p. Λ-模，则下列陈述是等价的：

(i) A 是投射模；

(ii) A 是平坦模；

(iii) $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0$；

(iv) $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/m, A)=0, \forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$.

定理 6.6.6 设 Λ 是凝聚弱半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 VN 正则环；

(ii) $J=0$；

(iii) $I\cap J=IJ, \forall$ 理想 I；

(iv) $I\cap m=Im, \forall$ 理想 $I, \forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$；

(v) Λ/J 是平坦 Λ-模；

(vi) Λ/m 是平坦 Λ-模，$\forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$，即每个单 Λ 模是平坦的.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 因 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=0$，故 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda_m=0, \forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$，即 Λ_m 也是 VN 正则环. 又对任意 $0\neq x\in \Lambda_m$，$x\Lambda_m$ 是 Λ_m 的直和项，但 Λ_m 是不可分的，故 $x\Lambda_m=\Lambda_m$，即 x 是可逆元. 所以 Λ_m 是除环. 于是知 $J_m=0, \forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$. 从而 $J=0$.

(ii)$\Rightarrow$(iv) 由推论 6.6.3(i)知结论成立.

(iv)$\Rightarrow$(iii) $\forall\ m\in \mathrm{Max}(\Lambda)$，由定理 6.6.2 得

$$
\begin{aligned}
(I\cap J)_m &= I_m\cap J_m=I_m\cap m_m=(I\cap m)_m \\
&= (Im)_m=I_m m_m=I_m J_m=(IJ)_m.
\end{aligned}
$$

所以 $I\cap J=IJ$.

(iii)$\Rightarrow$(i) 设 $x\in J$，则 $x\Lambda=x\Lambda\cap J=xJ$. 因此存在 $\lambda\in J$ 使 $x=x\lambda$. 于是 $x(1-\lambda)=0$. 又由定理 1.6.7 知 $1-\lambda$ 可逆，故 $x=0$. 所以 $J=0$. 从而 Λ 是 VN 正则环.

(i)$\Rightarrow$(v) 显然结论是成立的.

(v)$\Rightarrow$(vi) 设 A 是任意 f.p. Λ-模，因 Λ/J 是平坦模，故得 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Lambda/J, A)=0$. 因而由推论 6.6.5 知 A 是平坦 Λ-模. 但 Λ/m 是 f.g. Λ-模，故它必是f.p. Λ-模的正向极限. 从而 Λ/m 是平坦 Λ-模的正向极限. 故 Λ/m 是平坦 Λ-模.

(vi)$\Rightarrow$(i) 应用(v)$\Rightarrow$(vi)的类似方法，可以推得每个 Λ-模是平坦模. 故 Λ 是 VN 正则环.

第七章

对偶模的同调性质

在第五章里，我们简单介绍了模范畴对偶性的一般知识，并应用 f.g. 半自反 Λ-模引进了一类新环——π-凝聚环. 这一章将进一步讨论对偶模的同调性质. 60 年代初，Bass[12]，Jans [45]和 Ishikawa[42]等应用同调代数的方法来研究模的对偶性，这个研究方向已成为这一领域的重要方向. 在本章里，我们主要研究 Noether 环、π-凝聚环和凝聚环中的对偶性. 前三节是在 Λ-对偶的范围内进行讨论的.

7.1 自反模与环的自内射维数

设 Λ 是任意环，A 是左 Λ-模，记

$$A^{*}=\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,\Lambda).$$

A^{*} 是一个右 Λ-模，把它称为模 A 的对偶模. 令

$$\sigma_{A}:A\longrightarrow A^{**}\text{ 使 }\sigma_{A}(a)(\varphi)=\varphi(a),\ \forall\, a\in A,\ \varphi\in A^{*},$$

把 σ_{A} 称为赋值映射. 若 σ_{A} 是一个同构，则称 A 为自反模；若 σ_{A} 是单同态，则称 A 为半自反模.

一个模的自反性与环的同调维数之间有着密切联系.

命题 7.1.1 设 Λ 是任意环，A 是 f.g. 半自反 Λ-模，则存在一个 f.g. 半自反模 B(与 A 的类型相反)，使得序列

$$\sigma\longrightarrow A\xrightarrow{\delta_{A}}A^{**}\longrightarrow\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(B,\Lambda)\longrightarrow 0,\tag{1}$$

$$0\longrightarrow B\xrightarrow{\delta_{B}}B^{**}\longrightarrow\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(A,\Lambda)\longrightarrow 0\tag{2}$$

都正合，这里 δ_A，δ_B 是赋值映射.

证明 因为 A 是 f.g. 半自反模，所以得正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{\Phi} A \longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 F 的闭子模. 因而，又有正合列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\Phi^*} F^* \longrightarrow B \longrightarrow 0, \tag{3}$$

其中 F^* 仍是 f.g. 自由模，B 是 f.g. 的. 由于 K 是闭子模，即 $K''=K$，但 $K' \cong A^*$，因此 $K=(K')'=(A^*)'$.

$$\therefore \quad (A^*)''=((A^*)')'=K'=A^*.$$

故 A^* 是 F^* 的闭子模. 因此 B 是半自反的.

其次，因 F^* 是自由模，故 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(F^*, \Lambda)=0$. 于是由(3)得正合列

$$0 \longrightarrow B^* \longrightarrow F^{**} \xrightarrow{\Phi^{**}} A^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow 0. \tag{4}$$

考虑右边的交换图，这里 δ_F 是同构，δ_A 是单同态. 由于

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Phi} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \delta_F} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_A} \\ F^{**} & \xrightarrow{\Phi^{**}} & A^{**} \end{array}$$

$$A \cong \delta_A(A)=\mathrm{Im}\Phi^{**},$$

因此由(4)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{Cokor}\delta_A &= A^{**}/\delta_A(A) \\ &= A^{**}/\mathrm{Im}\Phi^{**}=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda), \end{aligned}$$

从而就得到正合列(1). 另外，由(4)又得正合列

$$0 \longrightarrow B^* \longrightarrow F^{**} \longrightarrow \mathrm{Im}\Phi^{**} \longrightarrow 0.$$

因为 $\delta_A(A)=\mathrm{Im}\Phi^{**}$，且 δ_A 又是单同态，所以这个正合列又可以表示为 $0 \longrightarrow B^* \longrightarrow F^{**} \longrightarrow A \longrightarrow 0$. 在(3)中令 $C=\mathrm{Im}\Phi^*$，因而得正合列 $0 \longrightarrow C \longrightarrow F^* \longrightarrow B \longrightarrow 0$. 再重复上面的讨论，最后就得到正合列(2).

定理 7.1.2 设 Λ 是左、右 Noether 环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.Id}\Lambda_\Lambda=\mathrm{r.Id}_\Lambda\Lambda=0$;

(ii) 每个 f.g. 左 Λ-模和每个 f.g. 右 Λ-模都是自反模.

证明 (i)⇒(ii) 若 A 是 f.g. 半自反的，则由命题 7.1.1 知有 Λ-模的正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta_A} A^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda)=0,$$

其中 B 是某个 f.g. 半自反模. 又由(i)得 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda)=0$. 故 δ_A 是一个同构. 因此 A 是自反的.

若 A 是任意 f.g. Λ-模，则有正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模. 因 Λ 是 Noether 环，故 K 是 f.g. 半自反模. 于是由上面的证明，K 是一个自反模. 再根据(i)和长正合定理，就得下面交模图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta_K} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_F} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_A} & & \\
0 & \longrightarrow & K^{**} & \longrightarrow & F^{**} & \longrightarrow & A^{**} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 δ_K，δ_F 是同构. 因此 δ_A 也是一个同构. 故 A 是自反模.

(ii)⇒(i)　由(ii)知${}_\Lambda\Lambda$，Λ_Λ 都是自反模. 又因为 Λ 是左、右 Noether 环，所以${}_\Lambda\Lambda$ 和 Λ_Λ 的每个商模也是自反模. 于是由定理 5.1.7 知，${}_\Lambda\Lambda$ 和 Λ_Λ 是内射模，即 $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda=\mathrm{r.Id}_\Lambda\Lambda=0$.

定义　设 Λ 是左、右 Noether 环，若 Λ 满足定理 7.1.2 中任一条件，则称 Λ 为 Quasi-Frobenius 环(简记为 QF-环).

定理 7.1.3　设 Λ 是左、右 Noether 环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.Id}_\Lambda\Lambda\leqslant 1$；

(ii) 每个 f.g. 半自反右 Λ-模是自反模；

(iii) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, P)=0$，$A$ 是 f.g. 半自反左 Λ-模，P 是 f.g. 投射左 Λ-模；

(iv) 每个 f.g. 左 Λ-模的投射闭子模是一个直因子.

证明　(i)⇒(iii)　设 A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是右 Noether 环，故得正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow F/A \longrightarrow 0, \tag{5}$$

其中 F 是 f.g. 自由模. 其次，把${}_\Lambda\Lambda$ 嵌入内射模 E，又有正合列

$$0 \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow E \longrightarrow U \longrightarrow 0. \tag{6}$$

由(5)和(6)，得

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(F/A, U)\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, {}_\Lambda\Lambda).$$

但 l. $\mathrm{Id}_\Lambda \Lambda \leqslant 1$，故 l. $\mathrm{Id}_\Lambda U = 0$，即 U 是内射模.

$$\therefore \quad 0 = \mathrm{Ext}_\Lambda^1(F/A,\ U) = \mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,{}_\Lambda\Lambda). \tag{7}$$

又设 P 是 f.g. 投射左 Λ-模，则${}_\Lambda\Lambda^{(n)} = P \oplus P'$. 于是由(7)得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\ P) = 0$.

(iii)⇒(ii) 设 A 是 f.g. 半自反右 Λ-模，由命题 7.1.1 知，存在一个 f.g. 半自反左 Λ-模 B，使得下面序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta_A} A^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,{}_\Lambda\Lambda) \longrightarrow 0$$

正合. 于是由(iii)得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,{}_\Lambda\Lambda) = 0$. 所以 A 是自反模.

(ii)⇒(i) 设 B 是任意 f.g. 左 Λ-模，因为 Λ 是左 Noether 环，所以得正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 由命题 7.1.1 知，存在一个 f.g. 半自反右 Λ-模 A，使得下面序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta_A} A^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,{}_\Lambda\Lambda) \longrightarrow 0$$

正合. 因而由(ii)知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,{}_\Lambda\Lambda) = 0$. 但是，由(6)可得

$$0 = \mathrm{Ext}_\Lambda^1(K,{}_\Lambda\Lambda) \cong \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B,\ U),$$

因此 U 是内射模. 于是又由(6)便得 l. $\mathrm{Id}_\Lambda \Lambda \leqslant 1$.

(iii)⇒(iv) 设 P 是 f.g. 左 Λ-模 A 的投射闭子模，则得正合列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow A/P \longrightarrow 0, \tag{8}$$

其中 A/P 是 f.g. 半自反左 Λ-模. 再由(iii)得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A/P,\ P) = 0$. 这样，又有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A/P,\ P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A/P,\ A)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A/P, A/P) \longrightarrow 0.$$

因此(8)是分裂正合的，故 P 是 A 的直和项.

(iv)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，P 是 f.g. 投射模，则有分裂正合列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

设 A 经 P 的另一扩张为

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0, \tag{9}$$

其中 X 是 f.g. 的. 由(iv)知 P 是 X 的直因子. 故序列(9)也是分裂正合的. 于是得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, P)=0$.

下面，我们把上面结果作进一步推广.

定理 7.1.4 设 Λ 是左、右 π-凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda\Lambda\leqslant 1$；

(ii) 每个 f.g. 半自反右 Λ-模是自反模；

(iii) $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, P)=0$，$A$ 是 f.g. 半自反左 Λ-模，P 是 f.g. 投射模；

(iv) 每个 f.g. 半自反左 Λ-模的投射闭子模是直因子.

证明 (i)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，由命题 5.2.8 知，存在正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow F\longrightarrow F/A\longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模. 其次，把 ${}_\Lambda\Lambda$ 嵌入内射模 E，又有正合列

$$0\longrightarrow {}_\Lambda\Lambda\longrightarrow E\longrightarrow U\longrightarrow 0. \tag{10}$$

于是得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, {}_\Lambda\Lambda)\cong\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F/A, U).$$

但是在(10)中，$\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda\Lambda\leqslant 1$，且 E 是内射，由命题 2.5.9 知，U 是 FP-内射模. 又因为 F/A 是 f.p. 的，所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(F/A, U)=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, {}_\Lambda\Lambda)=0$. 如果 P 是 f.g. 投射左 Λ-模，由定理 7.1.3 的证明便知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, P)=0$.

(iii)⇒(ii) 应用命题 7.1.1 可以推得.

(ii)⇒(i) 仿照定理 7.1.3 证明，便知结论成立.

(iii)⇔(iv) 与定理 7.1.3 证明是完全类似的.

现在，我们讨论凝聚环上每个 f.p. 模是自反模的条件.

定理 7.1.5(Jain) 设 Λ 是左凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda\Lambda=0$；

(ii) 每个 f.p. 右 Λ-模是自反模.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是 f.p. 右 Λ-模，于是得正合列 $F_0\longrightarrow F_1\longrightarrow A\longrightarrow 0$，其中 F_0，F_1 是 f.g. 自由模. 继而应用命题 5.3.4，又得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow A \longrightarrow A^{**} \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow 0, \quad (11)$$

其中 $B=\mathrm{Coker}(F_1^* \longrightarrow F_0^*)$. 又因 B 是 f.p. 左 Λ-模，故由(i)就有 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda)=0$. 其次，考虑左 Λ-模正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模. 因 Λ 是左凝聚环，B 是 f.p. 的，故 K 也是 f.p. 的. 由函子 $\mathrm{Ext}(-, {}_\Lambda\Lambda)$，就得正合列

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(F, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(F, \Lambda).$$

于是再由 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \Lambda)=\mathrm{Ext}^2_\Lambda(F, \Lambda)=0$，可得 $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(B, \Lambda)=0$. 最后由(11)便知 A 是自反模.

(ii)⇒(i) 因每个 f.p. 右 Λ-模皆是自反模，故都是半自反模. 因此由定理 5.3.5，Λ 是左自 FP-内射，即 $\mathrm{l.FP\text{-}Id}_\Lambda\Lambda=0$.

7.2 对偶模的同调维数

在第五章里，我们研究了 π-凝聚环中每个 f.g. 半自反模的对偶模的平坦维数和投射维数间的关系，以及研究了环的 W. gl. dim、FGT-W. dim 和 FGT-I. dim 之间的关系. 这一节，我们将进一步讨论这个问题.

定理 7.2.1 设 Λ 是左凝聚环，$n\geqslant 2$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$；

(ii) 每个左 Λ-模的对偶模的平坦维数 $\leqslant n$-2；

(iii) 每个半自反左 Λ-模的对偶模的平坦维数 $\leqslant n$-2；

(iv) 每个 f.p. 右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n$-2；

(v) 每个 f.p. 半自反右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n$-2.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意左 Λ-模，则有左 Λ-模正合列

$$P_1 \xrightarrow{g} P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中 P_0，P_1 是投射模. 于是又得右 Λ-模正合列

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \mathrm{Coker}g^* \longrightarrow 0.$$

因为 Λ 是左凝聚环，所以 $P_0{}^*$，$P_1{}^*$ 是平坦模. 继而由(i)便得 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(A^*)\leqslant n-2$.

(ii)⇒(iii) 结论显然是成立的.

(iii)⇒(i) 设 A 是任意 f.p. 右 Λ-模，于是有右 Λ-模正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\longrightarrow A\longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.g. 半自反模. 因而，又得正合列 $0\longrightarrow B\longrightarrow F'\overset{g}{\longrightarrow}K\longrightarrow 0$，其中 F' 是 f.g. 自由模. 又由命题 5.2.3，有左 Λ-模的正合列 $0\longrightarrow K^*\longrightarrow (F')^*\longrightarrow C\longrightarrow 0$，其中 $C=\mathrm{Coker}g^*$ 是 f.g. 半自反左 Λ-模，$B\cong C^*$. 因而根据(ii)得 $\mathrm{r.fd}_\Lambda B\leqslant n-2$. 但是序列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow F'\longrightarrow F\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

正合，因此 $\mathrm{r.fd}_\Lambda A\leqslant n$. 再由定理 2.3.2，就得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$.

(i)⇔(iv) 由引理 5.3.7 知，$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n\Leftrightarrow \mathrm{l.fd}_\Lambda(B^*)\leqslant n-2$，$\forall$ f.p. 右 Λ-模 B. 因 Λ 是左凝聚环，故 B^* 是 f.p. 左 Λ-模. 因此 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(B^*)=\mathrm{l.pd}_\Lambda(B^*)$.

(iv)⇒(v) 结论显然是成立的.

(v)⇒(i) 设 A 是任意 f.p. 左 Λ-模，则存在正合列 $0\longrightarrow K_0\longrightarrow F_0\longrightarrow A\longrightarrow 0$，其中 F_0 是 f.g. 自由模，K_0 是 f.p. 半自反模. 于是又得正合列 $0\longrightarrow K_1\longrightarrow F_1\overset{g}{\longrightarrow}K_0\longrightarrow 0$，其中 F_1 是 f.g. 自由模. 又由命题 5.2.3 知，$K_1\cong B^*$，$B=\mathrm{Coker}g^*$ 是 f.p. 半自反右 Λ-模. 故根据(v)，$\mathrm{l.pd}_\Lambda K_1\leqslant n-2$. 于是由正合列 $0\longrightarrow K_1\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow A\longrightarrow 0$，便得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$. 所以 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$.

推论 7.2.2 设 Λ 是左凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant 2$；

(ii) 每个左 Λ-模的对偶模是平坦模；

(iii) 每个半自反左 Λ-模的对偶模是平坦模.

(iv) 每个 f.p. 右 Λ-模的对偶模是投射模；

(v) 每个 f.p. 半自反右 Λ-模的对偶模是投射模.

定理 7.2.3 设 Λ 是左、右凝聚环，$n\geqslant 0$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) W. gl. dim$\Lambda \leqslant n+1$;

(ii) 每个半自反左 Λ-模的平坦维数$\leqslant n$;

(iii) 每个 f. p. 半自反左 Λ 模的投射维数$\leqslant n$.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意半自反左 Λ-模，于是有正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow ({}_\Lambda\Lambda)^I \longrightarrow ({}_\Lambda\Lambda)^I/A \longrightarrow 0$. 因 Λ 是右凝聚环，故$({}_\Lambda\Lambda)^I$ 是平坦模. 因此由(i)可得 l. $\mathrm{fd}_\Lambda A \leqslant n$.

(ii)⇒(iii) 设 B 是 f. p. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左凝聚环，故 l. $\mathrm{fd}_\Lambda B$=l. $\mathrm{pd}_\Lambda B$. 再由(ii)便得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda B \leqslant n$.

(iii)⇒(i) 因 Λ 是左凝聚环，故它的每个 f. g. 左理想 I 是 f. p. 半自反左 Λ-模. 由(iii)得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda I \leqslant n$. 故 l. $\mathrm{pd}_\Lambda(\Lambda/I) \leqslant n+1$. 于是得 W. gl. dim$\Lambda \leqslant n+1$.

下面，我们讨论 f. p. gl. dimΛ 和 f. f. p. dimΛ.

定理 7. 2. 4(Mcrae) 设 Λ 是任意环，$n \geqslant 2$ 是整数，则下列陈述是等价的:

(i) l. f. p. gl. dim$\Lambda \leqslant n$;

(ii) 每个 f. p. 右 Λ-模的对偶模的投射维数$\leqslant n$-2.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意 f. p. 右 Λ-模，于是存在右 Λ-模正合列

$$\Lambda^{(m)} \xrightarrow{g} \Lambda^{(n)} \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

因而又有左 Λ-模正合列

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow (\Lambda^{(n)})^* \xrightarrow{g^*} (\Lambda^{(m)})^* \longrightarrow \mathrm{Coker}g^* \longrightarrow 0.$$

但 Cokerg^*是 f. p. 的，由(i)得 l. $\mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{Coker}g^*) \leqslant n$. 所以 l. $\mathrm{pd}_\Lambda(A^*) \leqslant n$-2.

(ii)⇒(i) 设 A 是任意 f. p. 左 Λ-模，于是得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Ker}g & \longrightarrow & \Lambda^{(m)} & \xrightarrow{g} & \Lambda^{(n)} & \longrightarrow A \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\tau} & & \downarrow{\sigma_{\Lambda^{(m)}}} & & \downarrow{\sigma_{\Lambda^{(n)}}} & \\ 0 \longrightarrow & (\mathrm{Coker}g^*)^* & \longrightarrow & (\Lambda^{(m)})^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & (\Lambda^{(n)})^{**} & \end{array} \qquad (1)$$

其中 $\sigma_{\Lambda^{(m)}}$，$\sigma_{\Lambda^{(n)}}$是同构. 由(1)又得交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Ker}g & \longrightarrow & \Lambda^{(m)} & \xrightarrow{g} & \mathrm{Im}g & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \tau & & \downarrow \sigma_{\Lambda^{(m)}} & & \downarrow \sigma_{\Lambda^{(n)}}|\mathrm{Im}g & \\
0 \longrightarrow & (\mathrm{Coker}g^*)^* & \longrightarrow & (\Lambda^{(m)})^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & \mathrm{Im}g^{**} & \longrightarrow 0
\end{array} \quad (2)
$$

在交换图(2)中，因 $\sigma_{\Lambda^{(m)}}$ 和 $\sigma_{\Lambda^{(n)}}|\mathrm{Im}g$ 皆是同构，故由五项引理知，τ 也是同构. 于是由(1)得正合列

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Coker}g^*)^* \longrightarrow \Lambda^{(m)} \longrightarrow \Lambda^{(n)} \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathrm{Coker}g^*$ 是 f.p. 的，根据(ii)得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(\mathrm{Coker}g^*)^* \leqslant n-2$. 故 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A \leqslant n$. 因此 $\mathrm{l.f.p.gl.dim}\Lambda \leqslant n$.

由 2.5 节知，$\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda = \mathrm{Sup}\{\mathrm{l.pd}_\Lambda A \mid A$ 是 f.p. 左 Λ-模，$\mathrm{l.pd}_\Lambda A < \infty\}$. 显然，$\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda \leqslant \mathrm{l.f.p.gl.dim}\Lambda$.

定理 7.2.5 设 Λ 是任意环，$n \geqslant 2$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda \leqslant n$；

(ii) 每个 f.p. 右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n-2$ 或 $=\infty$.

证明 (i)⇒(ii) 设 A 是任意 f.p. 右 Λ-模，则 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A^*)=\infty$，或 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A^*)<\infty$. 如果 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A^*)<\infty$，仿照定理 7.2.4 的证明，即可推得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A^*) \leqslant n-2$.

(ii)⇒(i) 设 A 是 f.p. 左 Λ-模，且 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A<\infty$，于是得正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_1 \xrightarrow{g} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中 F_0，F_1 是 f.g. 自由模. 由命题 5.2.3 知，$K \cong B^*$，$B=\mathrm{Coker}g^*$ 是 f.p. 右 Λ-模. 由于 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A<\infty$，因此 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K<\infty$. 于是由(ii)得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda K = \mathrm{l.pd}_\Lambda(B^*) \leqslant n-2$. 所以 $\mathrm{l.pd}_\Lambda A \leqslant n$. 因此 $\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda \leqslant n$.

推论 7.2.6 设 Λ 是左、右凝聚环，$n \geqslant 2$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda \leqslant n$；

(ii) 每个 f.p. 半自反右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n-2$ 或 $=\infty$；

(iii) 每个 f.p. 右 Λ-模的对偶模的投射维数 $\leqslant n-2$ 或 $=\infty$；

(iv) 每个 f.p. 半自反左 Λ-模的投射维数 $\leqslant n-1$ 或 $=\infty$.

证明 (i)⇔(iii) 由定理 7.2.5 知结论成立.

(iii)⇒(ii) 结论显然是成立的.

(ii)⇒(i) 仿照定理 7.2.5 的证明，即可推得.

(i)⇒(iv) 设 A 是 f.p. 半自反左 Λ-模，因 Λ 是左凝聚环，故有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 F 的 f.p. 闭子模. 由命题 5.1.9 知，$K=K''\cong(A^*)'\cong(F^*/A^*)^*$. 因 Λ 又是右凝聚环，故 A^* 是 f.p. 的. 其次，F^* 也是 f.g. 自由模，从而 F^*/A^* 是 f.p. 右 Λ-模. 故 $\text{l.pd}_\Lambda(F^*/A)^*=\text{l.pd}_\Lambda K\leqslant n\text{-}2$ 或 $=\infty$. 因此，$\text{l.pd}_\Lambda A\leqslant n\text{-}1$ 或 $=\infty$.

(iv)⇒(i) 设 A 是 f.p. 左 Λ-模，因 Λ 是左凝聚环，故得正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$，其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 半自反模. 由(iv)知，$\text{l.pd}_\Lambda K\leqslant n\text{-}1$ 或 $=\infty$. 所以 $\text{l.pd}_\Lambda A\leqslant n$ 或 $=\infty$. 因此 $\text{l.f.f.p.dim}\Lambda\leqslant n$.

推论 7.2.7 设 Λ 是左、右凝聚环，$n\geqslant 2$ 是整数，则下列陈述是等价的：

(i) $\text{W.gl.dim}\Lambda\leqslant n$;

(ii) 每个 f.p. 半自反左 Λ-模的对偶模的投射维数$\leqslant n\text{-}2$;

(iii) 每个 f.p. 左 Λ-模的对偶模的投射维数$\leqslant n\text{-}2$.

7.3 特殊模的对偶模

在第五章和在 7.2 节里，我们分别讨论了 π-凝聚环、Noether 环和凝聚环中对偶模的平坦性和投射性. 这一节，我们将研究对偶模的内射性和特殊模的对偶模.

定理 7.3.1 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) $\text{l.FGT-P.dim}\Lambda=0$;

(ii) 每个 f.g. 半自反右 Λ-模的对偶模是内射模；

(iii) 每个 f.g. 右 Λ-模的对偶模是内射模；

(iv) Λ 是左自内射、VN 正则环；

(v) Λ 是右 π-凝聚、左半遗传、左自内射环；

(vi) 每个 f.g. 半自反左 Λ-模是内射模.

证明 (i)⇔(iv) 即定理 5.4.8，故结论成立.

(i)⇔(v) 直接由定理 5.4.8 的证明可推得.

(i)⇔(vi) 由 $\mathrm{l.FGT\text{-}P.dim}\Lambda$ 的定义知，结论是成立的.

(vi)⇒(iii) 设 A 是 f.g. 右 Λ-模，因 Λ 也是左 π-凝聚环，故由定理 5.2.1 知，A^* 是 f.g. 半自反左 Λ-模. 于是由(vi)，A^* 是内射模.

(iii)⇒(ii) 结论显然是成立的.

(ii)⇒(vi) 由(ii)知 Λ 为左自内射. 设 A 是 f.g. 半自反左 Λ-模，则有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0,$$

其中 F 是 f.g. 自由模. 因而又得正合列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{g^*} F^* \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 $C=\mathrm{Coker}g^*$. 又由命题 5.2.3 知，C 是 f.g. 半自反右 Λ-模，且 $K\cong C^*$. 于是由(ii)，K 是内射模. 所以，$F\cong K\oplus A$. 但 Λ 是左自内射的，因此 F 是内射模. 故 A 是内射模.

定理 7.3.2 设 Λ 是左、右凝聚环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{l.f.f.p.dim}\Lambda\leqslant 1$；

(ii) 对每个 f.p. 半自反右 Λ-模 A，A 是投射模当且仅当 A^* 是投射模.

证明 (i)⇒(ii) 首先，我们证明对任意 f.g. 投射左 Λ 模 P 的每个 f.g. 子模 B，必有 $\mathrm{l.pd}_\Lambda B=0$ 或 ∞. 考虑正合列 $0 \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow P/B \longrightarrow 0$，其中 P/B 是 f.p. 左 Λ-模. 若 $\mathrm{l.pd}_\Lambda B<\infty$，则 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(P/B)<\infty$. 由(i)得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(P/B)\leqslant 1$. 故 $\mathrm{l.pd}_\Lambda B=0$.

现在，设 A 是任意 f.p. 半自反右 Λ-模，且 A^* 是投射模. 于是有正合列

$$F_1 \xrightarrow{g} F_0 \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0, \tag{1}$$

其中 F_1,F_2 是 f.g. 自由模. 由(1)又得正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0. \tag{2}$$

因 Λ 是右凝聚环，故 $K\cong \text{Im}g$ 是 f.p. 的. 于是由(2)可得左 Λ-模的正合列

$$0\longrightarrow A^*\longrightarrow F_0^*\longrightarrow \text{Coker}f^*\longrightarrow 0. \tag{3}$$

因 Λ 是左凝聚环，故 A^* 是 f.p. 的. 因此 $\text{Coker}f^*$ 是 f.p. 的. 但 A^* 是投射模，因此 $\text{l.pd}_\Lambda(\text{Coker}f^*)\leqslant 1$. 其次，$\text{Coker}f^*$ 是 f.g. 投射模 F_1^* 的 f.g. 子模，由上面证明知道，$\text{l.pd}_\Lambda(\text{Cokre}f^*)=0$. 因此(3)是分裂正合的. 于是得 $F_0^*=A^*\oplus\text{Coker}f^*$. 又因 A 是半自反的，由(2)知 K 为 F_0 的闭子模.

$$\therefore\quad K=K''=(\text{Coker}f^*)^*.$$

于是 $F_0\cong F_0^{**}\cong A^{**}\oplus(\text{Coker}f^*)^*\cong A^{**}\oplus K$.

所以 K 是 F_0 的直因子. 因而序列(2)是分裂正合的. 故 A 也是投射模. 反之，若 A 是 f.g. 投射模，则 A^* 也是投射模.

(ii)⇒(i) 首先，设 B 是 f.p. 半自反左 Λ-模，且 $\text{l.pd}_\Lambda B<\infty$. 因 Λ 是左凝聚环，故有正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow F\longrightarrow B\longrightarrow 0, \tag{4}$$

其中 F 是 f.g. 自由模，K 是 f.p. 半自反模. 因 $\text{l.pd}_\Lambda B<\infty$，故 $\text{l.pd}_\Lambda K<\infty$ 且 $\text{l.pd}_\Lambda K\leqslant \text{l.pd}_\Lambda B-1$. 于是不失一般性，可以假设 $\text{l.pd}_\Lambda B\leqslant 1$，而 K 是投射模. 我们要证明 $\text{l.pd}_\Lambda B=0$. 由(4)得正合列

$$0\longrightarrow B^*\longrightarrow F^*\longrightarrow F^*/B^*\longrightarrow 0. \tag{5}$$

由于 B 是半自反的，因此 K 是 F 的闭子模. 因而得 $K=K''=(F^*/B^*)^*$. 这样便知$(F^*/B^*)^*$是投射模. 继而由(ii)知 F^*/B^* 也是投射模. 于是序列(5)是分裂正合的. 从而得 $F^*\cong B^*\oplus(F^*/B^*)$.

$$\therefore\quad F\cong F^{**}\cong B^{**}\oplus(F^*/B^*)^*=B^{**}\oplus K.$$

因此 K 是 F 的直因子. 最后由(4)知 B 是投射模，即 $\text{l.pd}_\Lambda B=0$.

现在，设 A 是任意 f.p. 左 Λ-模，且 $\text{l.pd}_\Lambda A<\infty$. 因 Λ 是左凝聚环，故得正合列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow F\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$

其中 B. F 是 f.g. 自由模，B 是 f.p. 半自反模. 继而由上面证明知，$\text{l.pd}_\Lambda B=0$. 故 $\text{l.pd}_\Lambda A\leqslant 1$. 于是得 $\text{l.f.f.p.dim}\Lambda\leqslant 1$.

推论 7.3.3 设 Λ 是左、右 Noether 环，则下列陈述是等价的：

(i) l. f. f. p. $\dim\Lambda\leqslant 1$；

(ii) 对每个 f. g. 半自反右 Λ-模 A，A 是投射当且仅当 A^* 是投射模.

下面的讨论，主要参考文献[110]，着重解决何时投射(内射或平坦)模的对偶模是投射(内射或平坦)模.

命题 7.3.4 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是左凝聚环；

(ii) 每个投射左 Λ-模的对偶模是平坦模；

(iii) 每个自由左 Λ-模的对偶模是平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 设 P 是投射左 Λ-模，由定理 1.1.1 知，存在投射模 Q 使得

$$P\oplus Q=\Lambda^{(I)}.$$

于是得 $P^*\oplus Q^*=\Lambda^I$. 因 Λ 是左凝聚环，故根据定理 1.3.7 知 Λ^I 是平坦右 Λ-模. 所以 P^* 是平坦模.

(ii)⇒(iii) 结论显然是成立的.

(iii)⇒(i) 事实上，对任意指标集 I，有

$$\Lambda_\Lambda^I=[({}_\Lambda\Lambda)^*]^I=\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda^{(I)},\Lambda).$$

因${}_\Lambda\Lambda^{(I)}$是自由模，故由(iii)知$[{}_\Lambda\Lambda^{(I)}]^*$是平坦模. 所以 Λ_Λ^I 是平坦的. 故由定理 1.3.7 知 Λ 是左凝聚环.

命题 7.3.5* 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是右完全、左凝聚环；

(ii) 投射右 Λ-模的任意直积是投射模；

(iii) Λ_Λ^I 是投射模，I 是任意集合.

(文献[18]定理 3.3).

定理 7.3.6 设 Λ 是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是右完全、左凝聚环；

(ii) 每个投射左 Λ-模的对偶模是投射模；

(iii) 每个自由左 Λ-模的对偶模是投射模.

证明 (ii)⇔(iii) 结论显然是成立的.

(i)⇒(ii) 设 P 是投射左 Λ-模，由命题 7.3.4 知，P^* 是平坦模.

又因 Λ 是右完全环，故根据定理 1.7.12 知 P^* 是投射模.

(ii)$\Rightarrow$(i) 事实上，对任意集合 I，必有

$$\Lambda_\Lambda^I=[({}_\Lambda\Lambda)^*]^I=\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda^{(I)},\ \Lambda)=[{}_\Lambda\Lambda^{(I)}]^*.$$

因${}_\Lambda\Lambda$ 是投射模，故${}_\Lambda\Lambda^{(I)}$也是投射模. 由(ii)知$({}_\Lambda\Lambda^{(I)})^*$是投射模. 从而 Λ_Λ^I 也是投射模. 于是由命题 7.3.5 知 Λ 是右完全、左凝聚环.

命题 7.3.7 设 Λ 是左、右 Noether 环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 QF-环；

(ii) 每个投射左 Λ-模和每个投射右 Λ-模是内射模；

(iii) Λ 关于左理想和关于右理想满足极小条件，并且，${}_\Lambda\Lambda$ 和 Λ_Λ 是内射的.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 若(i)成立，由于每个投射模是自由模的直和项，因此我们仅需证明每个自由左 Λ-模是内射模. 令 $F=\bigoplus_{\alpha\in I}\Lambda_\alpha$是自由左 Λ-模，这里 $\Lambda_\alpha=\Lambda$，$\forall\ \alpha\in I$. 考虑图(6)，这里 L 是左理想，Inc 表示包含映射. 因 Λ 是左 Noether 环，L 是 f.g. 的，故 Imf 必被包含在 F 的一个直和项 F' 内. 而 $F'=\Lambda\alpha_1\oplus\cdots\oplus\Lambda\alpha_n$ 也是自由模，且${}_\Lambda\Lambda$ 是内射模，所以 F'是内射模. 于是由 Baer 准则，存在 Λ-同态 $g:\Lambda\longrightarrow F'$ 使图(7)是交换的. 显然，同态 g 也使得图(6)是交换的，故由 Baer 准则，F 是内射模.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\text{Inc}} & \Lambda \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ & & F & & \end{array}\qquad(6)$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\text{Inc}} & \Lambda \\ & & {\scriptstyle f|F'}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & & F' & & \end{array}\qquad(7)$$

同理，每个投射右 Λ-模是内射模.

若(ii)成立，因${}_\Lambda\Lambda$ 和 Λ_Λ 是投射模，故${}_\Lambda\Lambda$ 和 Λ_Λ 是内射模，且 Λ 是左、右 Noether 环. 因而 Λ 是 QF-环.

(iii)$\Rightarrow$(i) 结论显然是成立的.

(i)$\Rightarrow$(iii) 因 Λ 是 QF-环，由定理 7.1.2 的证明知，${}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ 定义一个 Morita 对偶. 令 $\mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda)$与 $\mathscr{L}(\Lambda_\Lambda)$分别表示 Λ 的所有左理想和所有右理想组成的集合，对任意 $I\in\mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda)$，规定 $I\mapsto\mathrm{Ann}_\Lambda\cdot I$. 由定理 5.1.11 可知，这是 $\mathscr{L}({}_\Lambda\Lambda)$与 $\mathscr{L}(\Lambda_\Lambda)$间的格的反同构.

现在，设$\{H_\alpha\,|\,\alpha\in T\}$是环 Λ 的任意左理想的集合，且它没有极小

元. 则$\{\mathrm{Ann}_\Lambda\cdot H_\alpha\mid\alpha\in T\}$是环的右理想的集合，且没有极大元. 这与$\Lambda$是右 Noether 环矛盾，因此$\{H_\alpha\mid\alpha\in T\}$有极小元. 故$\Lambda$关于左理想满足极小条件. 类似地，可以证明$\Lambda$关于右理想满足极小条件.

定理 7.3.8*(**Faith-Walker**) 环Λ是 QF-环当且仅当每个内射右Λ-模是投射的(文献[32]定理 24.12).

定理 7.3.9 设Λ是任意环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ是 QF-环；

(ii) 每个内射右Λ-模是半自反的，且每个平坦左Λ-模的对偶模是投射模；

(iii) 每个内射右Λ-模是半自反的，且每个投射左Λ-模的对偶模是投射模；

(iv) 每个内射右Λ-模是半自反的，且每个自由左Λ-模的对偶模是投射模.

证明 (i)⇒(ii) 因Λ是 QF-环，由命题 7.3.7 知，每个内射右Λ-模是投射模，从而是半自反模. 其次，设U是平坦左Λ-模，因Λ是 QF-环，根据命题 7.3.7，Λ是右 Artin 环. 从而由定理 1.7.12 知，Λ是左完全环. 故U是投射左Λ-模. 又因 QF-环是右完全、左凝聚环，故由定理 7.3.6，便知U^*是投射模.

(ii)⇒(iii)⇒(iv) 结论显然是成立的.

(iv)⇒(i) 设E是内射右Λ-模，则E^*是左Λ-模. 因而有左Λ-模正合列$F\longrightarrow E^*\longrightarrow 0$，其中$F$是自由模. 于是又得正合列$0\longrightarrow E^{**}\longrightarrow F^*$. 而由(iv)知$E$是半自反模，即序列$0\longrightarrow E\xrightarrow{\delta_E}E^{**}$正合，故$E$可以看作$F^*$的子模. 但$E$是内射，所以$E$是$F^*$的直因子. 另外，由(iv)知$F^*$是投射模，所以它的直因子$E$也是投射模. 这样，每个内射右$\Lambda$-模是投射模. 故由定理 7.3.8，$\Lambda$是 QF-环.

命题 7.3.10 设Λ是交换环，则下列陈述是等价的：

(i) $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$；

(ii) 每个平坦Λ-模的对偶模是内射模；

(iii) 每个投射Λ-模的对偶模是内射模.

证明 (i)⇒(ii) 设 U 是平坦 Λ-模，A 是任意 Λ-模，由(i)知 Λ 是内射 Λ-模. 于是得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, U^*)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A, U), \Lambda).$$

因 U 是平坦模，故 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A, U)=0$. 从而知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, U^*)=0$. 所以 U^* 是内射模.

(ii)⇒(iii)⇒(i) 结论显然是成立的.

命题 7.3.11 设 Λ 是交换凝聚环，且 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$，则内射模的对偶模是内射模.

证明 设 E 是内射 Λ-模，A 是任意 f.p. Λ-模，因 Λ 是交换凝聚环，故得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E,A)\cong\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,E),A)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A,\Lambda),E).$$

又因 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, \Lambda)=0$. 从而得 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E, A)=0$. 所以 E 是平坦模. 再由命题 7.3.10 可知，E^* 是内射模.

定理 7.3.12 设 Λ 是交换凝聚环，且 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$，则 Λ 是 QF-环当且仅当对每个 Λ-模 E，E 是内射模⇔E^* 是平坦模.

证明 若 Λ 是 QF-环，令 E 是内射模，A 是任意 f.p. Λ-模. 因 Λ 是交换凝聚环，且 Λ 是内射 Λ-模，故得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E^*, A)=\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(E, \Lambda), A)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, E), \Lambda).$$

但 E 是内射模，故 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, E)=0$. 从而得

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E^*, A)=0.$$

所以 E^* 是平坦模. 现在，设 E^* 是平坦模，因 Λ 是 QF-环，故 Λ 是 Noether 环，且 Λ 是内射 Λ-模. 从而对任意 f.g. Λ-模 A，必有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E^*, A)&=\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(E, \Lambda), A)\\&\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, E), \Lambda).\end{aligned}$$

又因 E^* 是平坦模，故 $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(E^*, A)=0$. 于是得

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, E), \Lambda)=0.$$

但 Λ 是 QF-环，它是一个内射余生成元，从而有 $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, E)=0$. 所以 E 是内射模.

反过来，因 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$，故我们仅需证明 Λ 是 Noether 环. 设 $E=$

$\oplus_{i\in I}E_i$，其中每个 E_i 是内射 Λ-模，则 $E^*=\Pi_{i\in I}E_i^*$. 因 E_i^* 是平坦模，且 Λ 是凝聚环，故由定理 1.3.7 知 E^* 是平坦模. 因此 E 是内射模. 于是由定理 1.1.5 知 Λ 是 Noether 环. 所以 Λ 是QF-环.

7.4 半局部环上 G-Matlis 对偶模

在这节里，Λ 始终表示交换半局部环，J 是环 Λ 的 Jacobson 根，$E(\Lambda/J)$是 Λ-模 Λ/J 的内射包络. Belshoff 在文献[14]中研究了 Matlis 自反模. 我们将引进 G-Matlis 对偶模概念，讨论 G-Matlis 自反模 A 与对偶模 A^V 间的同调维数的关系，以及在交换 Noether 完备半局部环上，函子 Hom，$\otimes$，Ext 和 Tor 保持自反性问题.

定义 设 Λ 是半局部环，A 是 Λ-模，记

$$A^V=\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\ E(\Lambda/J)),$$

并把它称为模 A 的 G-Matlis 对偶模. 令

$$\sigma_A: A \longrightarrow A^{VV} \text{使 } \sigma_A(a)(\varphi)=\varphi(a),\ \forall\ a\in A,\ \varphi\in A^V.$$

则 σ_A 是一个 Λ-同态. 若 σ_A 是一个同构，则称 A 为 G-Matlis 自反模.

命题 7.4.1 设 Λ 是半局部环，A 是 G-Matlis 自反模，则 $\mathrm{Id}_\Lambda A\leqslant \mathrm{fd}_\Lambda A^V$.

证明 若 $\mathrm{fd}_\Lambda A^V=\infty$，则显然结论是成立的.

现在，设 $\mathrm{fd}_\Lambda A^V=n<\infty$，于是得正合列

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow A^V \longrightarrow 0,$$

其中每个 F_i 是平坦 Λ-模. 因而序列

$$0 \longrightarrow A^{VV} \longrightarrow F_0^V \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{n-1}^V \longrightarrow F_n^V \longrightarrow 0$$

是正合的. 因 Λ/J 是半单环，故 $E(\Lambda/J)$是内射余生成元. 于是每个 F_i^V 是内射 Λ-模. 从而得 $\mathrm{Id}_\Lambda(A^{VV})\leqslant n$. 但 $A\cong A^{VV}$，所以 $\mathrm{Id}_\Lambda A\leqslant \mathrm{fd}_\Lambda A^V$.

命题 7.4.2 设 Λ 是凝聚半局部环，A 是内射 Λ-模，则 A^V 是平坦 Λ-模.

证明 设 I 是 Λ 的 f.g. 理想，因 Λ 是凝聚环，故 I 是 f.p. 的. 于是有同构

$$\eta_I: I\otimes_\Lambda A^V \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(I, A), E(\Lambda/J)).$$

由于 $0\longrightarrow I\longrightarrow \Lambda\longrightarrow \Lambda/I\longrightarrow 0$ 正合，且 A 是内射模，因此得正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/I, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(I, A)\longrightarrow 0.$$

因而有交换图

$$\begin{array}{ccc} 0\longrightarrow I\otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(A, E(\Lambda/J)) & \longrightarrow & \Lambda\otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(A, E(\Lambda/J)) \\ \eta_I\downarrow & & \downarrow\eta_\Lambda \\ 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(I,A), E(\Lambda/J)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,A), E(\Lambda/J)) \end{array} \quad (1)$$

其中 η_I，η_Λ 是同构，下一行正合. 继而由图(1)的交换性知，上一行也正合. 故 A^V 是平坦模.

定理 7.4.3 设 Λ 是凝聚半局部环，A 是 G-Matlis 自反模，则 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A^V$.

证明 由命题 7.4.1，我们仅需证 $\mathrm{Id}_\Lambda A\geqslant \mathrm{fd}_\Lambda A^V$.

若 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\infty$，则显然结论是成立的.

若 $\mathrm{Id}_\Lambda A=n<\infty$，则得正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow X_0\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_n\longrightarrow 0,$$

其中每个 X_i 是内射 Λ-模. 又由函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, E(\Lambda/J))$，得正合列

$$0\longrightarrow X_n^V\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_0^V\longrightarrow A^V\longrightarrow 0.$$

并由命题 7.4.2 知，每个 X_i^V 是平坦模. 所以 $\mathrm{fd}_\Lambda A^V\leqslant n$. 于是得 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A^V$.

命题 7.4.4 设 Λ 是半局部环，A 是 Λ-模，B 是 A 的子模，则 A 是 G-Matlis 自反模当且仅当 B 和 A/B 是 G-Matlis 自反模.

证明 因 $E(\Lambda/J)$是内射模，故得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\sigma_B & & \downarrow\sigma_A & & \downarrow\sigma_{A/B} & & \\ 0 & \longrightarrow & B^{VV} & \longrightarrow & A^{VV} & \longrightarrow & (A/B)^{VV} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中行皆正合，垂直映射都是 Λ-单同态. 从而，σ_A 是同构当且仅当 σ_B 和 $\sigma_{A/B}$是同构，即 A 是 G-Matlis 自反模当且仅当 B 和 A/B 是 G-Matlis自反模.

命题 7.4.5 设 Λ 是 Noether 半局部环，则每个 f.g. Λ-模是 G-Matlis 自反模当且仅当 Λ 是完备环. 并且，当 Λ 是 Noether 完备的半局部环时，每个 Artin 模和 $E(\Lambda/J)$ 是 G-Matlis 自反模.

证明 若每个 f.g. Λ-模是 G-Matlis 自反模，则 Λ 是 G-Matlis 自反的. 于是得

$$\Lambda \cong \Lambda^{VV} = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, E(\Lambda/J)), E(\Lambda/J))$$
$$\cong \oplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}_\Lambda(E(\Lambda/m_i), E(\Lambda/m_j)),$$

这里 m_i，m_j 是 Λ 的极大理想. 若 $i \neq j$，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(E(\Lambda/m_i), E(\Lambda/m_j)) = 0$. 因而得

$$\Lambda \cong \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_\Lambda(E(\Lambda/m_i), E(\Lambda/m_i)) \cong \oplus_{i=1}^{n} \hat{\Lambda}_{m_i} \cong \hat{\Lambda}.$$

所以 Λ 是完备环.

反过来，设 A 是 f.g. Λ-模，则存在一个自然数 n，使得 $\Lambda^{(n)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ 正合. 因 Λ 是完备的，由上面讨论知 Λ 是 G-Matlis 自反模. 因此 $\Lambda^{(n)}$ 也是 G－Matlis 自反模. 再根据命题 7.4.4 便知，$\Lambda^{(n)}$ 的商模 A 是 G-Matlis 自反模.

最后，若 Λ 是 Noether 完备的半局部环，易知 $E(\Lambda/J)$ 是 G-Matlis 自反的. 现在，设 A 是 ArtinΛ-模，则存在一个自然数 t，使得 $E(A) = E(\Lambda/m_1) \oplus \cdots \oplus E(\Lambda/m_t)$，这里 m_1，$m_2 \cdots$，m_t 皆是 Λ 的极大理想. 因 $E(\Lambda/J)$ 是 G-Matlis 自反的，故 $E(\Lambda/m_1) \oplus \cdots \oplus E(\Lambda/m_t)$ 也是 G-Matlis 自反的，即 $E(A)$ 是 G-Matlis 自反模.

推论 7.4.6 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 和 B 是 G－Matlis 自反模，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 也是 G-Matlis 自反模，且

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)^V = A \otimes_\Lambda B^V.$$

命题 7.4.7 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，$E = E(\Lambda/J)$. 对一个自然数 n，令 S 和 B 分别是 $\Lambda^{(n)}$ 和 $E^{(n)}$ 的子模，则

(i) $S' \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/S, E)$，$E^{(n)}/S' \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(S, E)$，$S'' \cong S$；

(ii) $B' \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(E^{(n)}/B, E)$，$\Lambda^{(n)}/B' \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(B, E)$，$B'' \cong B$；

(iii) 令 X 和 Y 分别是由 Noether Λ-模和 Artin Λ-模组成的全子范畴，则函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, E)$ 建立了 X 和 Y 之间的 1-1 对应，这里 $S' =$

$\mathrm{Ann}_{(\Lambda^{(n)})^V}S$，$B'=\mathrm{Ann}_{(E^{(n)})^V}B$.

证明 由命题 5.1.9 得

$$S'\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/S,\ E),\ B'\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(E^{(n)}/B,\ E).$$

又因 $0\longrightarrow S\longrightarrow \Lambda^{(n)}\longrightarrow \Lambda^{(n)}/S\longrightarrow 0$ 正合，且 E 是内射模，故得正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/S,\ E)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)},\ E)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S,\ E)\longrightarrow 0.$$

但 $S'\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/S,\ E)$，$E^{(n)}\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)},\ E)$，故

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\ E)\cong E^{(n)}/S'.$$

同理，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\ E)\cong \Lambda^{(n)}/B'$.

其次，因 Λ 是 Noether 环，$\Lambda^{(n)}$ 是 Noether Λ-模，故 S 是 f.g. Λ-模. 又因 Λ 是 Noether 完备的半局部环，由命题 7.4.5 知，S 是 G-Matlis 自反模. 于是得

$$S\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(S,\ E),\ E)\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(E^{(n)}/S',\ E)\cong S''.$$

又由命题 7.4.5 知，E 是 G-Matlis 自反模，因而 $E^{(n)}$ 和 $E^{(n)}$ 的子模 B 也是 G-Matlis 自反模. 于是得

$$B\cong B^{VV}=\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\ E),\ E)\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/B',\ E)\cong B''.$$

最后，设 A 是 Noether 模，则存在一个自然数 n，使得 $A=\Lambda^{(n)}/S$，S 是 $\Lambda^{(n)}$ 的子模. 由(i)知 $A^V=\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^{(n)}/S,\ E)\cong S'$. 因 $E^{(n)}$ 是有限余生成的，故 $E^{(n)}$ 是 Artin 模. 从而它的子模 S' 是 Artin 模. 所以 A^V 是 Artin 模. 如果 A 是 Artin 模，因 E 是余生成元，于是存在一个自然数 n 使得 A 与 $E^{(n)}$ 的一个子模同构. 继而由(ii)可得 $A^V=\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\ E)\cong \Lambda^{(n)}/S$. 故 A^V 是 Noether 模.

定理 7.4.8 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，$E=E(\Lambda/J)$，若 A 是 ArtinΛ-模，则 $\mathrm{pd}_\Lambda A^V=\mathrm{Id}_\Lambda A$.

证明 因 Λ 是 Noether 完备半局部环，且 A 是 Artin Λ-模，由命题 7.4.5，故 A 为 G-Matlis 自反的. 根据定理 7.4.3 得 $\mathrm{Id}_\Lambda \mathrm{A}=\mathrm{fd}_\Lambda A^V$. 又因 A 是 Artin 模，由命题 7.4.7，A^V 是 Noether 模，且 Λ 为 Noether 环. 于是又得 $\mathrm{fd}_\Lambda A^V=\mathrm{pd}_\Lambda A^V$. 所以 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\mathrm{pd}_\Lambda A^V$.

下面，我们假定 Λ 始终表示交换 Noether 完备的半局部环，$E=$

$E(A/J)$. 在这种假设下，由推论 7.4.6 知，若 A 和 B 是 G-Matlis 自反的，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$也是 G-Matlis 自反的. 又根据命题 7.4.4 和命题 7.4.5 知，$E(A/J)$定义了一个 Morita 对偶. 下面，我们主要证明：若 A 和 B 是 G-Matlis 自反的，则 $A\otimes_\Lambda B$，$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$和 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)$皆是 G-Matlis 自反的.

命题 7.4.9 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 和 B 是 G-Matlis 自反 Λ-模，则 $A\otimes_\Lambda B$ 是 G-Matlis 自反的，并且$(A\otimes_\Lambda B)^V\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B^V)$.

证明 因为 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A\otimes_\Lambda B, E)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Lambda(B, E))$，所以$(A\otimes_\Lambda B)^V\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B^V)$. 又 B 是G-Matlis自反的，易知 B^V 也是G-Matlis自反的. 应用推论 7.4.6，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B^V)$同样是 G-Matlis 自反的. 于是$(A\otimes_\Lambda B)^V$ 是 G-Matlis 自反的. 所以 $A\otimes_\Lambda B$ 也是 G-Matlis 自反的.

引理 7.4.10 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 是 G-Matlis 自反模，B 是 Artin 模，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$是 G-Matlis 自反的.

证明 取模 B 的极小内射分解

$$0\longrightarrow B\xrightarrow{\varepsilon}E_0\xrightarrow{d_0}E_1\longrightarrow\cdots\longrightarrow E_n\xrightarrow{d_n}E_{n+1}\longrightarrow\cdots, \qquad (2)$$

因 B 是 Artin 模，故每个 E_n 是 Artin 模. 令 $C=\mathrm{ker}d_n$，由(2)得复形

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(A,E_{n-1})\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(A,E_n)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(A,E_{n+1})\longrightarrow\cdots.$$

于是得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)\cong\frac{\ker \mathrm{Hom}(A, d_n)}{\mathrm{Im}\ \mathrm{Hom}(A, d_{n-1})}\cong\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)}{\mathrm{Im}\ \mathrm{Hom}(A, d_{n-1})}.$$

因 E_n 是 Artin 模，故根据命题 7.4.5 知 E_n 是 G-Matlis 自反的. 从而它的子模 C 是 G-Matlis 自反的. 于是由推论 7.4.6 知，$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$是G-Matlis自反的. 因此，$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$也是 G-Matlis 自反模.

与引理 7.4.10 对称地又有以下引理，其证明留给读者.

引理 7.4.11 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 是 Artin 模，B 是 G-Matlis 自反模，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$是 G-Matlis 自反的.

引理 7.4.12 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 是 f.g. 模，B

是 G-Matlis 自反模，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$是 G-Matlis 自反的.

证明 因 B 是 G-Matlis 自反的，故存在正合列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow B/C \longrightarrow 0,$$

其中 C 是 B 的 f.g. 子模，B/C 是 Artin 模. 从而又得正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B/C) \longrightarrow \cdots.$$

因 A 和 C 是 f.g. 的，且 Λ 是交换 Noether 环，故由命题 3.1.5 知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C)$是 f.g. 的. 从而 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C)$是 G-Matlis 自反的. 又因 A 是 G-Matlis 自反的，B/C 是 Artin 模，故由引理 7.4.10 知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B/C)$是 G-Matlis 自反的. 所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$也是 G-Matlis 自反模.

命题 7.4.13 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 和 B 是 G-Matlis 自反模，则 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$是 G-Matlis 自反的.

证明 因为 A 是 G-Matlis 自反的，所以存在正合列 $0 \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow A/C \longrightarrow 0$，其中 C 是 A 的 f.g. 子模，A/C 是 Artin 模. 因而又得正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A/C, B) \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B) \xrightarrow{g} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(C, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(A/C, B) \longrightarrow \cdots.$$

所以序列

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B) \longrightarrow \mathrm{Im} g \longrightarrow 0$$

正合. 因 A/C 是 Artin 模，B 是 G-Matlis 自反的，故由引理 7.4.11 知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A/C, B)$是 G-Matlis 自反模. 从而 $\mathrm{Im} f = \ker g$ 也是 G-Matlis 自反的. 又因 C 是 f.g. 的，B 是 G-Matlis 自反的，故由引理 7.4.12 得 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(C, B)$是 G-Matlis 自反模. 从而 $\mathrm{Im} g$ 也是 G-Matlis 自反的. 所以 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B)$是 G-Matlis 自反模.

命题 7.4.14 设 Λ 是 Noether 完备的半局部环，A 和 B 是 G-Matlis 自反的，则 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)$是 G-Matlis 自反模.

证明 首先，有

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)^V \cong \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B^V).$$

因 B 是 G-Matlis 自反的，故 B^V 也是 G-Matlis 自反的. 又因 A 是 G-

Matlis 自反的，故由命题 7.4.13 知 $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, B^V)$是G-Matlis自反的. 从而 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)^V$ 也是 G-Matlis 自反的. 所以 $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)$是G-Matlis自反模.

7.5 关于内射余生成元的对偶模

G-Matlis 对偶性，实际上是讨论半局部环上的模关于内射余生成元 $E(\Lambda/J)$的对偶模间的性质. 这一节，我们将研究任意交换环上关于一般内射余生成元的对偶性问题.

下面，Λ 始终表示交换环，E 表示范畴 $\mathscr{C}_\Lambda$ 的内射余生成元，把 Λ-模 A 关于 E 的对偶模 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, E)$记为 A^e.

命题 7.5.1 设 A 是任意 Λ-模，则 $\mathrm{fd}_\Lambda A=\mathrm{Id}_\Lambda A^e$.

证明 因 E 是内射模，故得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, E))\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B, A), E),$$

这里 B 是任意 Λ-模. 由于 E 是内射余生成元，因此得

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B, A^e)=0\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_n^\Lambda(B, A)=0.$$

所以 $\mathrm{fd}_\Lambda A=\mathrm{Id}_\Lambda A^e$.

推论 7.5.2 设 A 是任意 Λ-模，则 A 是平坦模$\Leftrightarrow A^e$ 是内射模.

命题 7.5.3 设 Λ 是 Noether 环，A 是任意 Λ-模，则 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A^e$.

证明 因 Λ 是 Noether 环，且 E 是内射模，故得

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, E), B)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B, A), E),$$

这里 B 是任意 f.g. Λ-模. 由于 E 是内射余生成元，因此

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A^e, B)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_\Lambda^n(B, A)=0.$$

所以 $\mathrm{Id}_\Lambda A=\mathrm{fd}_\Lambda A^e$.

推论 7.5.4 设 Λ 是 Noether 环，则 A 是内射模$\Leftrightarrow A^e$ 是平坦模.

下面，应用特殊模的对偶模刻画一些环类.

引理 7.5.5 设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是 Λ-模正合列，则下列陈述是等价的：

(i) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是纯正合的；

(ii) $0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0$ 是纯正合的；

(iii) $0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0$ 是分裂正合的.

证明 因 E 是内射模，故 $0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0$ 是正合的.

(i)⇒(iii) 因 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是纯正合的，故 $0 \longrightarrow A^{c} \otimes_{\Lambda} A \longrightarrow A^{c} \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow A^{c} \otimes_{\Lambda} C \longrightarrow 0$ 正合. 于是得交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A^{c}, C^{c}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A^{c}, B^{c}) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A^{c}, A^{c}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow (A^{c} \otimes_{\Lambda} C)^{c} & \longrightarrow & (A^{c} \otimes_{\Lambda} B)^{c} & \longrightarrow & (A^{c} \otimes_{\Lambda} A)^{c} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中行皆正合，垂直映射皆是同构. 因此 f 是一个满同态. 所以 $0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0$分裂正合.

(iii)⇒(ii) 结论显然是成立的.

(ii)⇒(i) 因 $0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0$ 是纯正合的，故由定理 1.2.6 得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, C^{c}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, B^{c}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, A^{c}) \longrightarrow 0,$$

其中 K 是任意 f.p. Λ-模. 从而又得交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, C^{c}) & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, B^{c}) & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(K, A^{c}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to (K \otimes_{\Lambda} C)^{c} & \to & (K \otimes_{\Lambda} B)^{c} & \to & (K \otimes_{\Lambda} A)^{c} & \to & 0
\end{array}$$

其中上行正合，垂直映射皆是同构. 因此下一行也是正合的. 但 E 是内射余生成元，所以序列

$$0 \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} A \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} C \longrightarrow 0$$

正合. 故 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是纯正合的.

推论 7.5.6 设 A 是 Λ-模，若 A^{c} 是平坦的，则 A 是 FP-内射模.

证明 设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是任意 Λ-模正合列，于是知序列

$$0 \longrightarrow C^{c} \longrightarrow B^{c} \longrightarrow A^{c} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

也是正合的. 因 A^{c} 是平坦模，故由命题 1.2.5 知序列(1)是纯正合的.

从而根据引理 7.5.5，序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 也是纯正合的. 于是根据定理 2.5.1，A 是 FP-内射模.

定理 7.5.7 设 Λ 是任意交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是凝聚环；

(ii) 对任意 Λ-模 A，$\text{FP-Id}_\Lambda A = \text{fd}_\Lambda A^c$；

(iii) Λ-模 A 是 FP-内射模$\Leftrightarrow A^c$ 是平坦模；

(iv) 若 Λ-模 A 是内射模，则 A^c 是平坦模；

(v) 若 Λ-模 A 是内射模(FP-内射模)，B 是内射 Λ-模，则 $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$是平坦模.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 因 Λ 是凝聚环，故得

$$\text{Tor}_n^\Lambda(\text{Hom}_\Lambda(A,E),B) \cong \text{Hom}_\Lambda(\text{Ext}_\Lambda^n(B,A),E),$$

其中 B 是 f.p. Λ-模. 由于 E 是内射余生成元，因此得

$$\text{Tor}_n^\Lambda(A^c, B) = 0 \Leftrightarrow \text{Ext}_\Lambda^n(B, A) = 0.$$

所以 $\text{fd}_\Lambda A^c = \text{FP-Id}_\Lambda(A)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii)和(iii)$\Rightarrow$(iv)、(v)$\Rightarrow$(iv) 结论显然是成立的.

(iii)$\Rightarrow$(i) 设 I 是任意指标集，因 $\Lambda^{(I)}$是平坦模，故由推论 7.5.2 知$(\Lambda^{(I)})^c = (\Lambda^c)^I$ 是内射模. 又根据(iii)知$[(\Lambda^c)^I]^c$ 是平坦模. 但 $\Lambda^c \cong E$ 是内射，于是$(\Lambda^c)^{(I)}$为 FP-内射. 从而由定理 2.5.1 知 $0 \longrightarrow (\Lambda^c)^{(I)} \longrightarrow (\Lambda^c)^I$ 是纯正合的. 这样，根据引理 7.5.5，序列$[(\Lambda^c)^I]^c \longrightarrow [(\Lambda^c)^{(I)}]^c \longrightarrow 0$ 分裂正合. 故$[(\Lambda^c)^{(I)}]^c$ 是$[(\Lambda^c)^I]^c$ 的直因子. 因而$[(\Lambda^c)^{(I)}]^c$是平坦模. 但$[(\Lambda^c)^{(I)}]^c \cong (\Lambda^{cc})^I$，所以$(\Lambda^{cc})^I$ 为平坦模. 另外，易知 Λ 是 Λ^{cc}的纯子模，因此 Λ^I 为$(\Lambda^{cc})^I$ 的纯子模. 考虑纯正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda^I \longrightarrow (\Lambda^{cc})^I \longrightarrow (\Lambda^{cc})^I/\Lambda^I \longrightarrow 0,$$

其中$(\Lambda^{cc})^I$ 是平坦模. 根据命题 1.2.5 知$(\Lambda^{cc})^I/\Lambda^I$ 是平坦模. 所以 Λ^I 也是平坦模. 从而由定理 1.3.7 知 Λ 是凝聚环.

(iv)$\Rightarrow$(iii) 若 A^c 是平坦模，则由推论 7.5.6 知 A 是 FP-内射模. 反之，若 A 是 FP-内射模，则根据定理 2.5.1 知正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow E(A)$是纯的，这里 $E(A)$是模 A 的内射包络. 又由引理 7.5.5 知，A^c 是$[E(A)]^c$的直因子. 但是按(iv)可知，$[E(A)]^c$ 是平坦模，所以 A^c 是平坦模.

(iii)⇒(v) 设 A 是 FP-内射模，B 是内射模. 因 E 是余生成元，故必存在指标集 I，使得序列 $0 \longrightarrow B \longrightarrow E^I$ 正合. 但 B 是内射，故这个序列是分裂正合的. 因而 B 是 E^I 的直因子，即 $E^I = B \oplus C$.

$\therefore$ $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, E^I) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B \oplus C)$

$\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \oplus \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$,

$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, E^I) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(A, E)^I = (A^c)^I$.

因此 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 是 $(A^c)^I$ 的直因子. 但由(iii)知 Λ 是凝聚环且 A^c 是平坦模，因此 $(A^c)^I$ 是平坦模. 所以 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 为平坦模.

推论 7.5.8 设 Λ 是半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是凝聚环；

(ii) 对任意 Λ-模 A，$\text{FP-Id}_\Lambda A = \mathrm{fd}_\Lambda A^V$；

(iii) Λ-模 A 是 FP-内射模⇔A^V 是平坦模；

(iv) 若 Λ-模 A 是内射模，则 A^V 是平坦模；

(v) 若 Λ-模 A 是内射模(FP-内射模)，B 是内射 Λ-模，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ 是平坦模.

定理 7.5.9 设 Λ 是任意交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 Noether 环；

(ii) 对任意 Λ-模 A，$\mathrm{Id}_\Lambda A = \mathrm{fd}_\Lambda A^c$；

(iii) Λ-模 A 是内射模⇔A^c 是平坦模.

证明 因 Noether 环上模的内射性与 FP-内射性是一致的，故由定理 7.5.7 知(i)⇒(ii)成立. 另外，(ii)⇒(iii)显然是成立的.

(iii)⇒(i) 设 $\{E_i \mid E_i$ 是内射 Λ-模，$\forall i \in I\}$，因 $(\bigoplus_{i \in I} E_i)^c \cong \prod_{i \in I} E_i^c$，故由(iii)知 E_i^c 是平坦模，$\forall i \in I$. 并且，应用定理 7.5.7 可知 Λ 为凝聚环. 故 $\prod_{i \in I} E_i^c$ 是平坦模. 从而 $(\bigoplus_{i \in I} E_i)^c$ 为平坦模. 又由(iii)知 $\bigoplus_{i \in I} E_i$ 是内射模. 于是根据定理 1.1.5，Λ 是 Noether 环.

推论 7.5.10 设 Λ 是半局部环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 Noether 环；

(ii) 对任意 Λ-模 A，$\mathrm{Id}_\Lambda A = \mathrm{fd}_\Lambda A^c$；

(iii) Λ-模 A 是内射模⇔A^c 是平坦模.

定理 7.5.11 设 Λ 是任意交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 Artin 环；

(ii) 对任意 Λ-模 A，$\text{FP-Id}_\Lambda A=\text{Id}_\Lambda A=\text{pd}_\Lambda A^c$；

(iii) Λ-模 A 是 FP-内射模$\Leftrightarrow A^c$ 是投射模；

(iv) Λ-模 A 是内射模$\Leftrightarrow A^c$ 是投射模；

(v) 若 Λ-模 A 是内射模（FP-内射模），B 是内射模，则 $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$是投射模.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 因 Λ 是 Artin 环，故由定理 1.7.12 知 Λ 是完全环. 从而根据定理 6.5.5 得 $\text{fd}_\Lambda A^c=\text{pd}_\Lambda A^c$. 又因 Λ 是 Noether 环，故由定理 7.5.9 便得

$$\text{FP-Id}_\Lambda A=\text{Id}_\Lambda A=\text{fd}_\Lambda A^c=\text{pd}_\Lambda A^c.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) 结论显然是成立的.

(iii)$\Rightarrow$(i) 设 I 是一个无限集，且 $\text{Card}I\geqslant\text{Card}\Lambda$，这里 Card 表示集合的基数. 因 Λ^c 是内射模，故$(\Lambda^c)^{(I)}$为 FP-内射模. 于是由(iii)知$[(\Lambda^c)^{(I)}]^c$ 是投射模. 但$(\Lambda^{cc})^I\cong[(\Lambda^c)^{(I)}]^c$，因此$(\Lambda^{cc})^I$ 是投射模. 另外，因 Λ 是 Λ^{cc}的纯子模，故 Λ^I 也是投射模$(\Lambda^{cc})^I$ 的纯子模. 从而 Λ^I 是自由模$\bigoplus_\alpha\Lambda_\alpha$ 的纯子模，这里 $\Lambda_\alpha=\Lambda$, $\forall\ \alpha$. 所以 Λ 的任意主理想链满足降链条件. 于是由定理 1.7.12 知 Λ 为完全环. 其次，因 Λ-模 A 是FP-内射模当且仅当 A^c 是投射模，故由定理 7.5.7 可知 Λ 为凝聚环. 这样，Λ 是完全环且是交换凝聚环. 故 Λ 是一个 Artin 环.

(ii)$\Rightarrow$(iv) 结论显然是成立的.

(iv)$\Rightarrow$(iii) 与定理 7.5.7(iv)$\Rightarrow$(iii)是类似的.

(i)$\Rightarrow$(v) 设 A 是 FP-内射模，B 是内射模，因 Artin 环是凝聚环，故由定理 7.5.7 知 $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$是平坦模. 又因 Λ 是完全环，故由定理 1.7.12 知 $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$为投射模.

(v)$\Rightarrow$(iii) 由(v)知，若 Λ-模 A 是内射模，则 A^c 是投射模. 再仿照定理 7.5.7(iv)$\Rightarrow$(iii)的证明，便知结论是成立的.

定义 设 Λ 是任意环(不一定是交换的)，若每个内射左 Λ-模是平坦模，则称 Λ 为左 IF-环.

下面，Λ 仍表示交换环.

命题 7.5.12 若环 Λ 是 IF-环，则它是凝聚环.

证明 设 Q 是任意内射 Λ-模，由题设知 Q 为平坦模. 又由推论 7.5.2 知 Q^c 是内射模. 因而 Q^c 为平坦模. 于是由定理 7.5.7 知 Λ 为凝聚环.

定理 7.5.13 设 Λ 是交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 IF-环；

(ii) Λ 是凝聚环，Λ^c 是平坦模；

(iii) 对任意平坦 Λ-模 A，A^c 是平坦模；

(iv) 对任意投射 Λ-模 P，P^c 是平坦模.

证明 (i)⇒(ii) 由命题 7.5.12 知，Λ 为凝聚环. 又因 $\Lambda^c \cong E$ 是内射模，且 Λ 为 IF-环，故 Λ^c 是平坦模.

(ii)⇒(iii) 设 A 是平坦模，则存在正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \Lambda^{(I)} \longrightarrow A \longrightarrow 0. \tag{2}$$

由命题 1.2.5 知，序列(2)是纯正合的. 因而由引理 7.5.5 知，序列

$$0 \longrightarrow A^c \longrightarrow [\Lambda^{(I)}]^c \longrightarrow K^c \longrightarrow 0$$

是分裂正合的. 故 A^c 是$[\Lambda^{(I)}]^c \cong (\Lambda^c)^I$ 的直因子. 但 Λ^c 是平坦模，且 Λ 是凝聚环，根据定理 1.3.7 便得$(\Lambda^c)^I$ 为平坦模. 于是它的直因子 A^c 为平坦模.

(iii)⇒(iv) 结论显然是成立的.

(iv)⇒(i) 设 Q 是任意内射 Λ-模，则存在正合列 $F \longrightarrow Q^c \longrightarrow 0$，其中 F 是自由模. 从而又得正合列 $0 \longrightarrow Q^{cc} \longrightarrow F^c$，并且由(iv)知 F^c 为平坦模. 但 Q 是半自反的，于是有正合列 $0 \longrightarrow Q \longrightarrow F^c$，且 Q 是内射模. 因而这个序列是分裂正合的，Q 是平坦 F^c 的直因子. 故 Q 是平坦模. 所以 Λ 是 IF-环.

定理 7.5.14 设 Λ 是交换环，则下列陈述是等价的：

(i) Λ 是 QF-环；

(ii) Λ 是 Artin 环，Λ^c 是投射模；

(iii) Λ 是 Noether 环，Λ^c 是投射模；

证明 (i)⇒(ii) 因 Λ 是 QF-环，故由命题 7.3.7 知 Λ 为 Artin 环，且 Λ 是内射模. 又由定理 7.5.11 知 Λ^c 是投射模.

(ii)⇒(iii) 结论显然是成立的.

(iii)⇒(i) 因 Λ 是 Noether 环, 故由定理 7.5.9 得 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=\mathrm{fd}_\Lambda\Lambda^c$. 但 Λ^c 是投射模, 于是得 $\mathrm{Id}_\Lambda\Lambda=0$. 所以 Λ 是 QF-环.

第八章

群环、斜群环、交叉积和群分次环的同调维数

群环、斜群环、交叉积和群分次环是群论和环论的汇合点之一.关于它们的研究成果，在环论和群论中都有较高的应用价值，而环论和群论的结果和研究方法，在群环、斜群环、交叉积和群分次环的研究中也起着重要的作用.在本章中，我们主要从环论的角度对群环、斜群环、交叉积和群分次环进行研究.与前面几章的研究方向相同，我们主要刻划这些特殊环类的同调维数.为了叙述的完整性和在以后各节中的方便，在第一节中我们给出这些环类的定义和一些基本性质；在第二节中我们从群环开始来研究它们的同调维数，给出一些经典的结果；在第三节中我们研究它们中最大的环类——群分次环的同调维数，我们主要对有限群进行研究，得到了许多通用的结果；而在第四节中研究交叉积和斜群环的同调维数，主要是对右 FBN 左凝聚环，给出了它上面的交叉积具有有限整体维数的充分条件，然后对系数环是交换环且交叉积是斜群环这一特殊情况，给出了这一斜群环具有有限整体维数的几个有用的充分必要条件.

关于群分次环我们的主要参考文献为[58]；关于交叉积则主要参考文献[71]，关于斜群环和群环主要参考文献[62]和[70].本章中的一些材料除来自上述参考文献外，也有许多结果引自[65]、[92～93]等文献.

8.1 基本概念和基本结果

关于群分次环的明确定义和对它们的系统研究是从文献[28]开始的. 尽管对它的研究历史不长，但在各个方向人们已获得了大量的研究成果，并且这仍是目前环论研究的一个活跃领域. 文献[58]对这一领域的许多研究工作作了系统的总结和概括. 尤其是在 1984 年 Cohen 和Montgomery关于 Smash Products 的研究成果[20]，给人们提供了一个将斜群环的研究成果推广到群分次环的有力工具. 在本节中我们定义一些基本概念和给出一些基本的经常引用的结果. 因为这些结果是经典的和熟知的，我们只给出参考文献而略去其证明.

定义 设 R 是一个环，G 是一个乘法群，若作为 Abel 群 R 有一个分解

$$R=\bigoplus_{g\in G}R_g,$$

使得 $R_gR_h\subseteq R_{gh}$，$\forall\ g, h\in G$，则称 R 为 G-分次环. 若进一步还有 $R_gR_h=R_{gh}$，$\forall\ g, h\in G$，则 R 称为强 G-分次环.

设 G 的单位元为 e，则易知 R_e 是 R 的子环且 R_e 包含有 R 的单位元 1(文献[58]I. 1. 1 命题).

例 1 设 G 是群，R 是环，令 $S=R[G]$是 G 在 R 上的群环，若令 $S_g=Rg$，则显然 S 是强 G-分次环.

例 2 设 R 是任一环，G 是任一群，G 的单位元为 e. 令 $R_e=R$，当 $g\neq e$ 时 $R_g=0$，显然 R 是 G-分次环(称为平凡 G-分次环).

例 3 设 K 是域，$S=M_3(K)$是 K 上的 3 阶矩阵环. 令 $G=\{e, x\}$ 是阶为 2 的群，则通过分解

$$S=S_e\oplus S_x,$$

其中

$$S_e=\begin{pmatrix}K & K & 0\\ K & K & 0\\ 0 & 0 & K\end{pmatrix},\quad S_x=\begin{pmatrix}0 & 0 & K\\ 0 & 0 & K\\ K & K & 0\end{pmatrix},$$

S 作成一个强 G-分次环([71]练习 3，P. 18).

设 G 是群，$R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是 G-分次环. 又设 M 是左 R-模，若作为 Abel 群 M 有一个分解 $M=\oplus_{g\in G}M_g$，使得 $R_gM_h\subseteq M_{gh}$，$\forall\ g, h\in G$，则称 M 为 G-分次 R-模. 若 $M=\oplus_{g\in G}M_g$ 和 $N=\oplus_{g\in G}N_g$ 都是分次 R-模，而且一个从 M 到 N 的 R 同态满足 $f(M_g)\subseteq N_g$，$\forall\ g\in G$，则称 f 为分次同态.

显然每个分次环作为它自身上的模都是分次模. 以分次模为对象，分次同态为态射作成一个范畴，称为分次模范畴，记作R-gr. 正如模范畴能用来刻划环的性质一样，分次模范畴是研究分次环的结构的一个有力工具.

定义 设 R 是含有单位元 1 的环，G 是群，则 G 在 R 上的交叉积是一个结合环，记作 $R*G$. 它包含 R 作为它的子环，并且是一个自由右 R-模，具有一组基 $\overline{G}$，$\overline{G}$ 的基数与 G 的基数相同. 从而 $R*G$ 中任一元素可唯一地表示成一个有限和 $\sum\limits_{g\in G}\overline{g}r_g$，$r_g\in R$. $R*G$ 中的加法与它作为 R-模时的加法一样按坐标定义；乘法由下面法则定义：$\forall\ g, h\in G$，

$$\overline{g}\,\overline{h}=\overline{gh}\tau(g, h)\ (\text{扭性}),$$

其中 $\tau: G\times G\to U(R)$，$U(R)$是 R 的单位作成的群. 另外$\forall\ g\in G$，$\forall\ r\in R$，

$$r\,\overline{g}=\overline{g}r^{\sigma(g)}\ (\text{作用}),$$

其中 $\sigma: G\to Aut(R)$.

在上面关于交叉积的定义中，若 τ 是平凡的，即 $\tau(g, h)=1$，$\forall\ g, h\in G$，则 $R*G$ 称为斜群环. 若 σ 是平凡的，即 $\sigma(g)=1$，$\forall\ g\in G$，则 $R*G$ 称为扭群环. 当 τ 和 σ 都是平凡的，则 $R*G$ 为我们熟知的群环.

显然每个交叉积都是一个强群分次环. 但强群分次环不一定是交叉积. 上面的例 3 中给出的环是强群分次环，但容易验证它不是交叉积.

由交叉积的定义我们看到，群 G 在环 R 上的一个交叉积 $R*G$，只是一个结合环. 它的结构通过映射 $\tau: G\times G\to U(R)$和映射

$\sigma:G\to Aut(R)$与G和R的结构紧密相联.但上面的映射τ和σ并不是任意的.σ和τ决定一个交叉积的充要条件是它们使得所定义的乘法具有结合律.对于这一条件，我们有下面的

引理 8.1.1 $R*G$的结合性等价于$\forall g, h, z\in G$，下述条件满足：

(i) $\tau(gh,z)\tau(g,h)^{\sigma(z)}=\tau(g,hz)\tau(h,z)$；

(ii) $\sigma(h)\sigma(z)=\sigma(hz)\eta(h,z)$，其中$\eta(h,z)$表示由$\tau(h,z)$导出的共轭同构(文献[71]引理 1.1).

设K是环,H是群,N是H的不变子群.令$R=K[N]$为N在K上的群环,$S=K[H]$为H在K上的群环,则R显然是S的子环.令$G=H/N$,则对任一$g\in G$,取一固定的元$\overline{g}\in H$,使得$\overline{g}N=g$.于是$H=\bigcup_{g\in G}\overline{g}N$为不相交并.从而有

$$S=K[H]=\bigoplus_{g\in G}\overline{g^{-1}}K[N]=\bigoplus_{g\in G}g^{-1}R,$$

$\overline{G}=\{\overline{g}\mid g\in G\}$是$S$的一组$R$-基.

因为$N\lhd H$，$\overline{g}^{-1}N\overline{g}=N$，所以$\overline{g^{-1}}K[N]\overline{g}=K[N]$,且$\overline{g}$导出$R$上一个共轭同构$\sigma(g)$.从而我们有一映射$\sigma:G\to \mathrm{Aut}(R)$，并且$\forall g\in G$，$\forall r\in R$，有

$$r\overline{g}=\overline{g}(\overline{g}^{-1}r\overline{g})=\overline{g}r^{\sigma(g)}.$$

$\forall g, h\in G$，有$\overline{g}N\overline{h}N=\overline{gh}N$.所以$\overline{g}\overline{h}=\overline{gh}\tau(g,h)$，$\tau(g,h)\in N\subseteq U(R)$，其中$U(R)$是$R$的单位作成的群.从而有一映射$\tau:G\times G\to U(R)$.由上面的讨论我们看到群环$S=K[H]$是商群$H/N$关于子群环$R=K[N]$的交叉积.所以交叉积实际上很自然地由群环引入，与群环密切相关.

与上面指出的群环可以作为一个商群关于一个子群环的交叉积相类似，我们有下面更一般的结果.

引理 8.1.2 设R是环，G是群，$R*G$是交叉积.令$N\lhd G$，则有

$$R*G-(R*N)*(G/N),$$

其中右边是商群G/N关于$R*N$的交叉积(文献[71]引理 1.3).

在关于群分次环、交叉积、斜群环和群环的研究中，有两类群是

特别重要的. 第一类是有限群，第二类是下面定义给出的群.

定义 设 G 是群，若 G 有一个有限的子群序列

$$G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{n+1}=(1),$$

使得 G_i 是 G_{i-1} 的不变子群($i=1, 2, \cdots, n+1$)，并且 G_{i-1}/G_i 是有限群或无限循环群，则称 G 为 Polycyclic-by-finite 群(文献[71] P. 6).

对于 Polycyclic-by-finite 群上的交叉积，我们有如下形式的 Hilbert 基定理.

命题 8.1.3 若 R 是右 Noether 环且 G 是 Polycyclic-by-finite 群，则任一交叉积 $R*G$ 是右 Noether 环(文献[71]命题 1.6).

证明 由引理 8.1.2 应用归纳法可知，只需证明当 G 是有限群或为无限循环群时结论成立即可.

若 $G=\langle g\rangle$ 是无限循环群，则 $R*G=\langle R, \bar{g}, \bar{g}^{-1}\rangle$ 由 R、$\bar{g}$、$\bar{g}^{-1}$ 生成且 $\bar{g}^{-1}R\bar{g}=R$. 从而由文献[70]中定理 10.2.6(iii)知 $R*G$ 是右 Noether 环.

若 G 是有限群，则 $R*G$ 是一个有限生成 R-模. 从而是右 Noether R-模. 所以 $R*G$ 必为一个 Noether 右 $R*G$-模.

在关于强群分次环的研究中，下述定理是一个非常有用的结果，我们把它列举出来而略去其证明.

定理 8.1.4 设 G 是群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强群分次环，则下列函子是一个同构函子：

$$R\otimes_{R_e}-:\quad \mathscr{C}_{R_e}^{L}\longrightarrow R-gr,$$
$$M\longrightarrow R\otimes_{R_e}M,$$

其中 $\mathscr{C}_{R_e}^{L}$ 是左 R_e-模范畴，M 为 R_e-模，$R\otimes_{R_e}M$ 作为分次 R-模由规则 $(R\otimes_{R_e}M)_g=R_g\otimes_{R_e}M$ 给出. 它的逆函子为

$$(-)e:\quad R-gr\longrightarrow \mathscr{C}_{R_e}^{L},$$
$$M\longrightarrow M_e,$$

其中 $M\in R-gr$，$M=\bigoplus_{g\in G}M_g$(文献[28]定理 2.8).

8.2 群环的同调维数

群和群环的同调性质是对群和群环研究的主要方向之一.在本节我们主要研究群环的同调维数，其内容主要引自文献[70].

设 R 是环，x 是 R 中一元，我们用 $\mathrm{r.Ann}_R(x)$ 和 $\mathrm{l.Ann}_R(x)$ 分别表示 x 在 R 中的右零化子和左零化子.

引理 8.2.1 设 R 是环，$a, b\in R$ 且 $\mathrm{r.Ann}_R(a)=bR$，$\mathrm{r.Ann}_R(b)=aR$，则 aR 和 bR 都是投射的且 $R\cong aR\oplus bR$，或者 $\mathrm{pd}(aR)=\mathrm{pd}(bR)=\infty$.

证明 令 $f:R\to aR$，$r\mapsto ar$，则 f 是一个从 R 到 aR 的满同态.因为 $\mathrm{r.Ann}_R(a)=bR$，所以有正合列

$$0\to bR\to R\to aR\to 0.$$

同理又有正合列

$$0\to aR\to R\to bR\to 0.$$

当 aR、bR 中有一个为投射模时，上述正合列有一个分裂. 因而 $R\cong aR\oplus bR$. 所以 aR、bR 都为投射模.若 aR 和 bR 都不为投射模，则由文献[66]中 P. 137定理 13 得 $\mathrm{pd}(aR)=\mathrm{pd}(bR)=\infty$.

引理 8.2.2 设 K 是域，G 是群且 A 是 $K[G]$-模，若 F 是自由 $K[G]$-模，则 $A\otimes_K F$ 也是自由 $K[G]$-模.若 P 是投射 $K[G]$-模，则 $A\otimes_K P$ 亦然.

证明 设$\{f_j\}_J$ 是自由模 F 的 $K[G]$-基，$\{a_i\}_I$ 是 A 的 K-基，则 $\{f_jx\mid x\in G,\ j\in J\}$是 F 的 K-基.由文献[70]中引理 1.3.2 知，$A\otimes_K F$ 的任一元可唯一地写成一个有限和的形式：

$$\sum_{j,x}\alpha_{j,x}\otimes f_jx,\quad \alpha_{j,x}\in A.$$

显然对每一 $x\in G$，$\{a_ix\}_{i\in I}$也是 A 的 K-基. 从而 $\alpha_{j,x}$可唯一地写成$\{a_ix\}_{i\in I}$的 K-线性组合.所以$\{a_ix\otimes f_jx\mid x\in G,\ i\in I,\ j\in J\}$是 $A\otimes_K F$ 的一组 K-基.又因为 $a_ix\otimes f_jx=(a_i\otimes f_j)x$，所以$\{a_i\otimes f_j\mid i\in I,\ j\in J\}$便是 $A\otimes_K F$ 的一组 $K[G]$-基.

若 P 是投射模，则 P 是某个自由模 F 的直和项. 从而 $A\otimes_K P$ 是自由模 $A\otimes_K F$ 的直和项. 所以 $A\otimes_K P$ 是投射模.

定义 设 K 是域，G 是群，V_0 是一维 K-向量空间，若定义 $vx=v$，$\forall\ x\in G$，$\forall\ v\in V_0$，则 V_0 成为一个 $K[G]$-模，称为主$K[G]$-模.

定理 8.2.3 设 K 是域，G 是群，V_0 是主 $K[G]$-模，则

$$\mathrm{gl.\,dim}K[G]=\mathrm{pd}(V_0).$$

证明 首先由定义我们有

$$\mathrm{gl.\,dim}K[G]\geqslant\mathrm{pd}(V_0).$$

设 $\mathrm{pd}(V_0)=n<\infty$，则 V_0 有一个长度为 n 的投射分解

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to V_0\to 0,$$

其中每个 P_i 都是投射 $K[G]$-模. 设 A 是任一 $K[G]$-模，因为 K 是域，其上的任一模平坦，所以有正合列

$$0\to A\otimes_K P_n\to A\otimes_K P_{n-1}\to\cdots\to A\otimes_K P_0\to A\otimes_K V_0\to 0.$$

由引理 8.2.2 知每个 $A\otimes_K P_i$ 都是投射 $K[G]$-模，从而 $\mathrm{pd}_{K[G]}A\otimes_K V_0\leqslant n$. 但作为 $K[G]$-模显然有 $A\cong A\otimes_K V_0$，因此 $\mathrm{pd}_{K[G]}A\leqslant n$. 因为 A 是任意的，所以由整体维数的定义便得

$$\mathrm{gl.\,dim}K[G]\leqslant n.$$

所以

$$\mathrm{gl.\,dim}K[G]=\mathrm{pd}(V_0).$$

设 p 是素数，一个群 G 称为 p'-群，若 G 中不含阶为 p 的元.

设 K 是域，G 为群，令

$$W(K[G])=\left\{\sum a_x x\mid \sum a_x=0\right\},$$

则 $W(K[G])$是 $K[G]$的一个理想，称为 $K[G]$的增广理想.

推论 8.2.4 设 K 是域，G 是群.

(i) $\mathrm{gl.\,dim}K[G]=0$ 当且仅当 G 是有限群且当 $\mathrm{char}K=p$ 时，G 中不含阶为 p 的元；

(ii) 设 H 是 G 的子群，则

$$\mathrm{gl.\,dim}K[H]\leqslant\mathrm{gl.\,dim}K[G];$$

(iii) 若 $\mathrm{gl.\,dim}K[G]<\infty$ 且 $\mathrm{char}K=p$，则 G 是一个 p'-群；

(iv) 若 $G=\{x_i\mid i\in I\}$是非恒等的自由群，则 $W(K[G])$是一个具

有基$\{x_i-1|i\in I\}$的自由右 $K[G]$-模；进一步还有

$$\text{gl. dim}K[G]=1.$$

证明 (i) 由 Maschke's 定理知 $K[G]$是半单的当且仅当 $\text{char}K=0$，或者当 $\text{char}K=p$ 时 G 是 p'-群(文献[70]定理 2.4.2). 而$K[G]$是 Artin 环当且仅当 G 是有限群(文献[70]定理 10.1.1). 又因为 $\text{gl. dim}K[G]=0$ 当且仅当 $K[G]$是半单 Artin 环，所以(i)可立即被推出.

(ii) 因为 $K[G]$是自由 $K[H]$模(文献[70]引理 1.1.3)，所以任意投射 $K[G]$-模 P 作为 $K[H]$上的模时也是投射模. 于是对任一 $K[G]$-模 A，我们有

$$\text{pd}_{K[H]}A\leqslant\text{pd}_{K[G]}A.$$

因为主 $K[G]$模被看作 $K[H]$上的模时正好是主 $K[H]$-模，所以可由上面的讨论及定理 8.2.3 便得出(ii).

(iii) 由(ii)知，我们只需证明当 $\text{char}K=p$ 时，若 $H=\langle x\rangle$是一个阶为 p 的循环群，则 $\text{gl. dim}K[H]=\infty$即可. 令 $R=K[H]$，并令 $a=x-1$，$b=1+x+\cdots+x^{p-1}$，则由文献[70]中引理 3.1.1 和 3.1.2 知，$\text{r. Ann}_R(a)=bR$，$\text{r. Ann}_R(b)=aR$. 从而由引理 8.2.1 知，或者 $\text{pd}(aR)=\text{pd}(bR)=\infty$，或者 $R\cong aR\oplus bR$. 因为 $b\neq 0$ 且 b 零化 aR 和 bR，所以后者为不可能. 故 $\text{pd}(aR)=\infty$. 所以$\text{gl. dim}K[H]=\infty$.

(iv) 由定义 G 可以写成无限循环群$\langle x_i\rangle$的自由积的形式:$G=\Pi_i^*\langle x_i\rangle$. 从而对任一元素 $g\in G$，可唯一写成一个有限积的形式 $g=x_{i_1}^{n_1}x_{i_2}^{n_2}\cdots x_{i_s}^{n_s}$，其中 $n_j\neq 0$，$i_j\neq i_{j+1}$. 我们称$|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_s|$为 g 的长度.

由文献[70]中引理 3.1.1 知，$W(K[G])=\sum_i(x_i-1)K[G]$. 从而只需证$\{x_i-1|i\in I\}$是 $K[G]$-线性无关的，即$\sum_i(x_i-1)\alpha_i=0$，$\alpha_i\in K[G]$推出 $\alpha_i=0$即可. 因为G中每个元表示的唯一性，映射 $\sigma:G\to G$，$x_i\mapsto x_i^2$ 是一个 G 到它的子群 $H=\langle x_i^2|i\in I\rangle$ 的同构. 此外 σ 可扩充为一个单射

$$\sigma:K[G]\to K[H]\subseteq K[G].$$

若 $\sum(x_i-1)\alpha_i=0$，则

$$\sum (x_i^2-1)\alpha_i^\sigma=\left(\sum (x_i-1)\alpha_i\right)^\sigma=0.$$

因为 σ 是单射，所以只需证明 $\sum (x_i^2-1)\beta_i=0$ 推出 $\beta_i=0$，$\forall\ i\in I$，即可.

设 $\sum (x_i^2-1)\beta_i=0$，令 $\gamma_i=x_i\beta_i$，则 $\sum (x_i-x_i^{-1})\gamma_i=0$. 若存在 $\gamma_i\neq 0$，则在这有限个非 0 的 γ_i 的支撑集中，存在一个元素 g，它具有最大的长度，设为 n. 为方便起见，设 $g\in\mathrm{Supp}(\gamma_1)$，从而在两个乘积 x_1g，$x_1^{-1}g$ 中至少有一个不能缩略，设为 $x_1^\delta g$，它的长度为 $n+1$. 故 $x_1^\delta g$ 不可能抵消，它必定出现在 $\gamma=\sum (x_i-x_i^{-1})\gamma_i$ 的支撑集中. 因为根据 n 的定义，在 $\mathrm{Supp}(\gamma)$中长度为 $n+1$ 的元素必有不可缩略的形式 $x_i^{\pm 1}h$，$h\in\mathrm{Supp}(\gamma_i)$. 但是 $x_i^{\pm 1}h=x_1^\delta g$ 导出 $i=1$，$\pm 1=\delta$ 和 $h=g$，从而 $x_1^\delta g$ 恰出现一次. 故 $x_1^\delta g\in\mathrm{Supp}(\gamma)$和 $\gamma\neq 0$. 这与假设矛盾，因此对所有 i 有 $\gamma_i=0$. 所以 $\beta_i=0$. 这样，$\{x_i-1\mid i\in I\}$是 $W(K[G])$的一组自由 $K[G]$-基.

最后，我们有正合序列

$$0\longrightarrow W(K[G])\longrightarrow K[G]\xrightarrow{\rho_G}K[G/G]\longrightarrow 0.$$

作为 $K[G]$模，$K[G/G]\cong V_0$. 因为在上面我们已证 $W(K[G])$是自由的，所以由上面的正合列可得 $\mathrm{pd}(V_0)\leqslant 1$. 所以根据定理 8.2.3 得 $\mathrm{gl.dim}K[G]\leqslant 1$. 又因为 G 是无限群，所以由(i)便得 $\mathrm{gl.dim}K[G]=1$.

定理 8.2.5 设 K 是域，G 是群，$H<G$. 若 $K[H]$和$K[G/H]$都有有限整体维数，则 $K[G]$亦然，且有

$$\mathrm{gl.dim}(K[G])\leqslant\mathrm{gl.dim}(K[H])+\mathrm{gl.dim}K[G/H].$$

证明 令 $\gamma=\mathrm{gl.dim}K[H]$. 首先，我们证明作为 $K[G]$-模有

$$\mathrm{pd}_{K[G]}K[G/H]\leqslant\gamma. \tag{1}$$

我们的证明方法是借助张量积从 $K[H]$-模诱导出 $K[G]$-模. 令 $X=\{x_i\mid i\in I\}$是一个固定的 H 关于 G 的代表元集. 由文献[70]中引理 1.1.3 知，$K[G]$是一个自由左 $K[H]$-模且以 X 为一组基. 考虑双模${}_{K[H]}K[G]_{K[G]}$，对任一右 $K[H]$-模 W，令

$$W^G=W\otimes_{K[H]}K[G].$$

从而 W^G 是一个右 $K[G]$-模. 若 W 为正则右 $K[H]$-模，即 $W=K[H]$，则作为右 $K[G]$-模，显然 $W^G=K[H]\otimes_{K[H]}K[G]\cong K[G]$. 这正好是正则右 $K[G]$-模. 同理，我们立即可证明每个自由右 $K[H]$-模 F 和每个投射右 $K[H]$-模 P 的导出模 F^G 和 P^G 都对应为自由右 $K[G]$-模和投射右 $K[G]$-模. 若右 $K[H]$-模 A 有一个有限的投射分解

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to A\to 0,$$

因为 ${}_{K[H]}K[G]$ 是自由的从而是平坦的，所以

$$0\to P_n\otimes_{K[H]}K[G]\to\cdots\to P_0\otimes_{K[H]}K[G]\to A\otimes_{K[H]}A\to 0$$

是一个正合右 $K[G]$-模序列. 由上面的讨论知每一 $P_i^G=P_i\otimes_{K[H]}K[G]$ 是投射右 $K[G]$-模. 从而上面的正合列是右 $K[G]$-模 A^G 的一个投射分解. 因此得

$$\mathrm{pd}_{K[G]}A^G\leqslant\mathrm{pd}_{K[H]}A.$$

若 V_0 是主 $K[H]$-模，则容易验证 $V_0^G=V_0\otimes_{K[H]}K[G]$ 作为右 $K[G]$-模同构于 $K[G/H]$. 因而得

$$\mathrm{pd}_{K[G]}K[G/H]=\mathrm{pd}_{K[G]}V_0^G\leqslant\mathrm{pd}_{K[H]}V_0=\gamma.$$

于是(1)式得证.

由上面的讨论及文献[70]中引理 10.3.4 可知，对任一非零自由 $K[G/H]$-模 F 作为 $K[G]$-模时有

$$\mathrm{pd}_{K[G]}F\leqslant\gamma.$$

同理，任一投射 $K[G/H]$-模作为 $K[G]$ 时，其投射维数也小于等于 γ.

设 $\mathrm{gl.dim}K[G/H]-s$，令 V_0 是主 $K[G/H]$-模，由定理 8.2.3 有 $\mathrm{pd}_{K[G/H]}V_0=\mathrm{gl.dim}K[G/H]=s$. 从而存在 $K[G/H]$-模序列 V_1，V_2，…，V_s 及 P_1，P_2，…，P_s，其中每个 P_i 是投射模，构成下列正合列

$$0\to V_i\to P_i\to V_{i-1}\to 0.$$

若把这些 $K[G/H]$ 上的模都看作 $K[G]$-模，则上面的序列仍是正合列，且 V_0 恰为主 $K[G]$-模. 下面我们对 i 用反向归纳法证明

$$\mathrm{pd}_{K[G]}V_i\leqslant\gamma+s-i.$$

因为 $\mathrm{gl.dim}K[G/H]=s$，所以 V_s 是投射 $K[G/H]$-模. 由前面的讨论知 $\mathrm{pd}_{K[G]}V_s\leqslant\gamma=\gamma+s-s$. 现设 $i\geqslant 1$ 且 $\mathrm{pd}_{K[G]}V_i\leqslant\gamma+s-i$，于是 $\mathrm{pd}_K[G]V_i$ 和 $\mathrm{pd}_{K[G]}P_i$ 都是有限的且 $\mathrm{pd}_{K[G]}P_i\leqslant\gamma$. 从而由定理 2.1.2 得

$\mathrm{pd}_{K[G]}V_{i-1}$也是有限的且

$$\mathrm{pd}_{K[G]}V_{i-1}\leqslant 1+\mathrm{Max}\{\mathrm{pd}_{K[G]}V_i,\ \mathrm{pd}_{K[G]}P_i\}$$
$$\leqslant 1+(\gamma+s-i)=\gamma+s-(i-1).$$

由归纳法原理对所有 $i\leqslant s$ 都有

$$\mathrm{pd}_{K[G]}V_i\leqslant \gamma+s-i.$$

当取 $i=0$ 时,

$$\mathrm{pd}_{K[G]}V_0\leqslant \gamma+s=\mathrm{gl.\,dim}K[H]+\mathrm{gl.\,dim}K[G/H].$$

从而由定理 8.2.3 本定理即得证.

设 K 是域,G 是群,H 是 G 的一个不变子群. 又设 K 的特征为 p 且 $\mathrm{gl.\,dim}K[H]<\infty$. 若 G/H 是一个 p'-群,则由定理 8.2.5 和推论 8.2.4(i)和(ii)可得 $\mathrm{gl.\,dim}K[G]=\mathrm{gl.\,dim}\,K[H]<\infty$. 另一方面,若 $p\,\Big|\,|G/H|$,则 $\mathrm{gl.\,dim}\,K[G/H]=\infty$. 从而由推论 8.2.4(iii),我们不能得到 $K[G]$具有有限整体维数这一性质. 事实上,即使 G/H 具有阶为 p 的元,G 本身也很可能不含阶为 p 的元. 在这种情形,我们仍希望$K[G]$具有有限整体维数. 事实上,这一结果是成立的. 这就是关于群环研究领域著名的 Serre 定理. 因为这一结论的证明要用到许多繁锁的计算,所以我们略去其证明而将结论给出如下.

定理 8.2.6 设 K 是域,G 是群,H 是 G 的子群,它具有有限指数. 若 $\mathrm{gl.\,dim}K[H]<\infty$,并且当 $\mathrm{Char}K=p$ 时,G 中没有阶为 p 的元素,则有

$$\mathrm{gl.\,dim}K[G]<\infty.$$

(文献[78]或[70]定理 10.3.2).

事实上在定理 8.2.6 中,我们还可以得到更为精确的结果,即 $K[G]$的整体维数与 $K[H]$的整体维数相等. 但真正有意义的还是整体维数的有限性.

下面定理是我们这一节的中心结果.

定理 8.2.7 设 G 是一个 Polycyclic-by-finite 群,K 是域,则 $\mathrm{gl.\,dim}K[G]<\infty$当且仅当 $\mathrm{Char}K=p$ 时 G 中不含阶为 p 的元素.

证明 若 $\mathrm{gl.\,dim}K[G]<\infty$,则由推论 8.2.4(iii)知当 $\mathrm{Char}K=p$

时，G 中不含阶为 p 的元素. 现在假设 G 是一个 Polycyclic-by-finite 群且它不含阶为 p 的元素. 又设

$$\langle 1\rangle = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

是 G 的子群的一个有限正规序列，每个商群 G_i/G_{i-1} 或是有限的，或为无穷循环群. 下面对 i 作归纳法证明 $\mathrm{gl.dim}K[G_i]<\infty$. 当 $i=0$ 时结论显然成立. 设 $i\geqslant 0$ 且 $\mathrm{gl.dim}K[G_i]<\infty$，若 G_{i+1}/G_i 是无限循环群，则由推论 8.2.4(iv)知 $\mathrm{gl.dim}K[G_{i+1}/G_i]=1$. 从而由定理 8.2.5 得

$$\mathrm{gl.dim}K[G_{i+1}]\leqslant \mathrm{gl.dim}K[G_i]+\mathrm{gl.dim}K[G_{i+1}/G_i]<\infty.$$

在另一种情形，若 G_{i+1}/G_i 是有限的，则由定理 8.2.6 知 $\mathrm{gl.dim}K[G_{i+1}]<\infty$. 从而总有 $\mathrm{gl.dim}K[G_{i+1}]<\infty$. 又因为 $G=G_n$，所以由归纳法原理便得 $\mathrm{gl.dim}K[G]<\infty$.

设 G 是一个 Polycyclic-by-finite 群，

$$\langle 1\rangle = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

是 G 的子群的一个有限正规序列，其中每个商群 G_{i+1}/G_i 或为有限群，或为无穷循环群. 我们把这些商群为无穷循环群的个数记为 $h(G)$，并称它为 G 的 Hirsch 数. 在定理 8.2.7 中，若 $\mathrm{gl.dim}\,K[G]<\infty$，则更精确地，我们有 $\mathrm{gl.dim}K[G]=h(G)$. 然而如同在定理 8.2.6 的后面已说明的那样，真正重要的是它的整体维数的有限性.

8.3 群分次环的同调维数

在本节中我们主要研究强群分次环的同调维数，并给出一些通用的结果，重点是研究有限群这种情形. 本节中的结果主要来自文献[65]，也有两个结果摘自文献[93]. 本节中我们总设 G 是一个群，单位元为 e.

引理 8.3.1 设 G 是任一群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是一个强 G-分次环，又设 H 是 G 的一个子群.

(i) 对任意 $g\in G$，$R_{gH}=\bigoplus_{h\in H}R_{gh}$ 是一个有限生成投射右 R_H-模；特别地 R 是一个投射右 R_H-模；

(ii) $\mathrm{r.gl.dim}(R_e)\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R_H)\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R)$.

证明 设 R, G, H 满足引理中所述条件.

(i) 令 $g\in G$，显然 R_{gH}是一个右 R_H-模. 因为 $1\in R_e=R_gR_{g^{-1}}$，所以必存在有限多个 $r_i\in R_g$，$s_i\in R_{g^{-1}}$，使得 $\sum_{i=1}^{n} r_is_i=1$. 从而

$$f_i:R_{gH}\to R_H:r\mapsto s_ir,\ \forall\ r\in R_{gH}$$

是一个 R_H-同态. 所以 $\sum_{i=1}^{n} r_if_i(r) = \sum_{i=1}^{n} r_is_ir=r$，$\forall\ r\in R_{gH}$. 由对偶基引理，$R_{gH}$是有限生成投射 R_H-模.

(ii) 直接由(i)和文献[64]中定理 7.2.8 推出.

设 G 是有限群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，则对每个 $g\in G$，$R_{g^{-1}}R_g=R_e$. 从而存在 $a_i^g\in R_{g^{-1}}$，$b_i^g\in R_g$，使得 $\sum_{I_g}a_i^gb_i^g=1$，其中 I_g 是有限集合. 设 M 和 N 是右 R-模，若 $f\in \mathrm{Hom}_{R_e}(M, N)$，则我们定义一个从 M 到 N 的映射$\tilde{f}$如下：

$$\tilde{f}(m)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}f(ma_i^g)b_i^g,\ \forall\ m\in M. \tag{1}$$

引理 8.3.2 设 G 是有限群，R 是强 G-分次环，又设 M 和 N 是右 R-模，$f\in \mathrm{Hom}_{R_e}(M, N)$，则由上面(1)式定义的$\tilde{f}$是一个 R-同态.

证明 对任一 $r\in R_h$，$h\in G$，任一 $m\in M$，由$\tilde{f}$的定义得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(mr)&=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}f(mra_i^g)b_i^g\\&=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}f(m(\sum_{I_{gh^{-1}}}a_j^{gh^{-1}}b_j^{gh^{-1}})ra_i^g)b_i^g.\end{aligned} \tag{2}$$

因为 $b_j^{gh^{-1}}\in R_{gh^{-1}}$，$r\in R_h$，$a_i^g\in R_{g^{-1}}$，所以 $b_j^{gh^{-1}}ra_i^g\in R_e$. 从而由(2)式得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(mr)&=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}\sum_{I_{gh^{-1}}}f(ma_j^{gh^{-1}})b_j^{gh^{-1}}ra_i^gb_i^g\\&=\sum_{g\in G}\sum_{I_{gh^{-1}}}f(ma_j^{gh^{-1}})b_j^{gh^{-1}}r\sum_{I_g}a_i^gb_i^g\\&=\sum_{g\in G}\sum_{I_K}f(ma_j^k)b_j^kr=\tilde{f}(m)r,\end{aligned}$$

其中我们记 $k=gh^{-1}$. 于是$\tilde{f}$是一个 R-同态.

根据引理 8.3.2，当 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$时，我们有$\tilde{f}=f|G|$.

设 G 是有限群，R 是强 G-分次环，又设 M 是右 R-模，若存在 $f\in \mathrm{Hom}_{R_e}(M,N)$，使得$\tilde{f}=1_M$，则称 M 为 R-正则模. 若 G 的阶 $|G|$ 在 R_e 中可逆，令 $n=|G|$，则容易验证对任意右 R-模 M，$\widetilde{(1/n)}=1_M$. 因而当 $|G|$ 在 R_e 中可逆时，每个右 R-模是 R-正则的.

命题 8.3.3 设 $R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，G 是有限群，$n=|G|$. 又设 $N\subset M$ 是两个右 R-模，M 没有 n-挠元. 若作为 R_e-模，N 是 M 的直和项，则存在 M 的 R-子模 P，使得作为 R_e-模，$N\oplus P$ 在 M 中是本质的. 此外，若 $M=nM$，则作为 R-模时，N 是 M 的一个直和项.

证明 因为作为 R_e-模时，N 是 M 的直和项，所以存在一个R_e-同态 $f:M\to N$,使得 $f(m)=m$，$\forall\ m\in N$. 令$\tilde{f}:M\to N$ 如同(1)式所定义，则$\forall\ x\in N$，$\tilde{f}(x)=nx$. 记 $P=\ker\tilde{f}$,若 $x\in P\cap N$，则 $nx=0$. 因为 N 无 n-挠元，所以 $x=0$. 下面证明作为 R_e-模时 $N\oplus P$ 在 M 中是本质的.

设 $x\in M$ 记 $y=\tilde{f}(x)$，则

$$\tilde{f}(nx)=n\tilde{f}(x)=ny=\tilde{f}(y).$$

因此$\tilde{f}(nx-y)=0$. 所以 $nx-y\in P$. 于是 $nx\in P\oplus N$，$nM\subseteq P\oplus N$. 由此可知,作为 R_e-模时 $N\oplus P$ 在 M 中是本质的. 若 $M=nM$，则由上面的陈述可立即得到 $M=P\oplus N$.

推论 8.3.4(Maschke 定理) 设 G 是有限群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，若 $n=|G|$在 R_e 中可逆，则当 R_e 是半单 Artin 环时，R 亦为半单 Artin 环.

证明 若 n 在 R_e 中可逆，则对任一右 R-模 M，$M=nM$. 而对 M 的任一 R-子模 N，因 R_e 是半单 Artin 环，故 N 作为 R_e-模是 M 的直和项. 再由命题 8.3.3 可知，作为 R-模时 N 亦为 M 的直和项. 所以 R 是半单 Artin 环.

引理 8.3.5 设 G 是有限群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，又设 $M\in\mathscr{C}_R$，$N\in R\text{-}gr$，$N=\bigoplus_{g\in G}N_g$，则对任一 $h\in G$，有

(i) 映射 $\varphi:\mathrm{Hom}_R(M, N)\to\mathrm{Hom}_{R_e}(M, N_h)$，$\varphi(f)=\pi_h f$ 是一个同构，其中 $\pi_h:N\to N_h$ 是经典投射；

(ii) 映射 $\psi:\mathrm{Hom}_R(N, M)\to\mathrm{Hom}_{R_e}(N_h, M)$，$\psi(g)=gi_\sigma$ 是一个同构，其中 $i_\sigma:N_\sigma\to N$ 是经典嵌入映射.

证明 (i) 设 $\varphi(f)=0$，即 $\pi_h f=0$，又设 $m\in M$，并记 $f(m)=\sum_{g\in G}n_g$. 因为 $\pi_h f=0$，所以 $n_h=0$. 设 $\lambda\in R_{h^{-1}k}$，则 $f(m\lambda)=f(m)\lambda=\sum_{g\in G}n_g\lambda$. 又因为 $n_h\lambda\in R_hR_{h^{-1}k}=R_k$，所以 $n_h\lambda=0$. 由于 λ 可为任意齐次元，因此像在(1) 式前面的讨论一样，存在 $\sum_{I_g}a_i^g b_i^g=1$. 所以 $n_h=n_h.1=n_h\sum a_i^g b_i^g=0$. 于是 $f(m)=0$，$\forall\ m\in M$. 因而 $f=0$，φ 是单射. 下面验证 φ 是满射. 设 $f'\in\mathrm{Hom}_{R_e}(M, N_h)$，令 $f=i_h f':M\to N$，又令 $\tilde{f}$ 由(1) 式定义，所以由引理 8.2.2 可知 $\tilde{f}\in\mathrm{Hom}_R(M, N)$. 若 $m\in M$，则

$$(\pi_h\tilde{f})(m)=\pi_h\tilde{f}(m)=\pi_h\sum\sum f(ma_i^g)b_i^g=\pi_h\sum\sum f'(ma_i^g)b_i^g$$
$$=\sum_{I_e}f'(ma_i^e)b_i^e=f'(m).$$

所以 $\varphi(\tilde{f})=f'$. 于是 φ 是满射. 从而 φ 是同构.

同理可以证明(ii).

现在我们证明关于分次环的一个非常有用的有关同调性质的结论.

定理 8.3.6 设 G 是一个有限群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是一个强 G-分次环，又设 $M\in\mathscr{C}_R$，$N\in R\text{-}gr$，令 $N=\bigoplus_{g\in G}N_g$，则对每个 $h\in G$，有

(i) $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)\cong\mathrm{Ext}_{R_e}^n(M, N_h)$；

(ii) $\mathrm{Ext}_R^n(N, M)\cong\mathrm{Ext}_{R_e}^n(N_h, M)$；

(iii) $\mathrm{pd}_{R_e}M\leqslant\mathrm{pd}_R M$，若 $\mathrm{pd}_R M<\infty$，则等式成立；

(iv) $\mathrm{Id}_{R_e}M\leqslant\mathrm{Id}_R M$，若 $\mathrm{Id}_R M\leqslant\infty$，则等式成立.

证明 取 M 在 $\mathscr{C}_R$ 中的一个投射分解

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

由引理 8.3.1 知 R 是一个投射 R_e-模. 从而作为 R_e-模时，上述序列是 M_{R_e} 的一个投射分解. 分别用 $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ 和 $\mathrm{Hom}_{R_e}(-, N_h)$ 作用于上述正合列得下述两个序列

$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, N) \to \cdots$

和

$0 \to \mathrm{Hom}_{R_e}(M, N_h) \to \mathrm{Hom}_{R_e}(P_0, N_h) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_{R_e}(P_{n-1}, N_h) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, N_h) \to \cdots.$

但由引理 8.3.5(i)，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{R_e}(M, N_h),$$

$$\mathrm{Hom}_R(P_i, N) \cong \mathrm{Hom}_{R_e}(P_i, N_h).$$

于是借助于上面两个导出序列，我们可立即得出(i). 与(i)的证明相类似，我们还可证明(ii).

因为由引理 8.3.1(i)知 R 是一个投射 R_e-模，所以可立即得到

$$\mathrm{pd}_{R_e}M \leqslant \mathrm{pd}_R M;\ \mathrm{Id}_{R_e}M \leqslant \mathrm{Id}_R M.$$

假设 $\mathrm{pd}_R M = n < \infty$，则对所有右 R-模 Y，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, Y) = 0$，且存在一个右 R-模 Y_0，使得 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(M, Y_0) \neq 0$. 考虑下面 R-模正合列

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow Y_0 \otimes_{R_e} R \xrightarrow{\alpha} Y_0 \longrightarrow 0, \tag{3}$$

其中 $\alpha(x \otimes a) = xa$，$\forall\ x \in Y_0$，$a \in R_0$. 由(3)式得正合列

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, \ker\alpha) \to \mathrm{Ext}_R^n(M, Y_0 \otimes_{R_e} R)$$

$$\to \mathrm{Ext}_R^n(M, Y_0) \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, \ker\alpha) = 0.$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^n(M, Y_0) \neq 0$，显然 $\mathrm{Ext}_R^n(M, Y_0 \otimes_{R_e} R) \neq 0$. 又因为 $Y_0 \otimes_{R_e} R$ 是一个分次 R-模且 $(Y_0 \otimes_{R_e} R)_e = Y_0 \otimes_{R_e} R_e \cong Y_0$，所以由(i)可得 $\mathrm{Ext}_{R_e}^n(M, Y_0) \neq 0$. 因此 $\mathrm{pd}_{R_e}M \geqslant n$. 但已知 $\mathrm{pd}_{R_e}M \leqslant \mathrm{pd}_R M = n$，从而 $\mathrm{pd}_{R_e}M = \mathrm{pd}_R M$. (iii)已得证.

又假设 $\mathrm{Id}_R M = n < \infty$，则存在 R-模 X，使 $\mathrm{Ext}_R^n(X, M) \neq 0$. 而对

任意 $Y\in\mathscr{C}_R$，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(Y, M)=0$. 考虑下列正合列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\beta}\mathrm{Hom}_{R_e}(R, X)\longrightarrow\mathrm{Coker}\beta\longrightarrow 0,$$

其中 $\beta(x)(a)=xa$. 与(iii)中的证明相类似，可推出

$$\mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{Hom}_{R_e}(R, X), M)\neq 0.$$

由于 $\mathrm{Hom}_{R_e}(R, X)$ 是一个分次 R-模，其中 $(\mathrm{Hom}_{R_e}(R, X))_g=\mathrm{Hom}_{R_e}(R_{g^{-1}}, X)$，$\forall g\in G$，因此 $(\mathrm{Hom}_{R_e}(R, X))_e=\mathrm{Hom}_{R_e}(R_e, X)\simeq X$. 又由(ii)推得 $\mathrm{Ext}_{R_e}^n(X, M)\neq 0$. 并结合 $\mathrm{Id}_{R_e}M\leqslant\mathrm{Id}_RM=n$，则有 $\mathrm{Id}_{R_e}M=\mathrm{Id}_RM$. (iv)也得证.

推论 8.3.7 设 $R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，G 是有限群，又设 $Q=\oplus_{g\in G}Q_g$ 是分次 R-模，则下列陈述等价：

(i) Q 在 $R\text{-}gr$ 中是内射的；

(ii) Q 在 $\mathscr{C}_R$ 中是内射的；

(iii) 对任一 $g\in G$，Q_g 是内射 R_e-模.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(iii) 由定理 8.1.4 可直接得到.

(ii)$\Rightarrow$(i) 由[58]中推论 3.3.10 得出.

(iii)$\Rightarrow$(ii) 由定理 8.3.6(ii)立即得出.

推论 8.3.8 设 G 是有限群，$R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，$N\in R\text{-}gr$，则

$$\mathrm{Id}_RN=\mathrm{Gr.\,Id}N=\mathrm{Id}_{R_e}N_g,\ \forall g\in G,$$

其中 $\mathrm{Gr.\,Id}N$ 为分次内射维数，其定义参见文献[58].

证明 这个结果可直接由推论 8.3.7 给出.

推论 8.3.9 设 G 是有限群，$R=\bigoplus\limits_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，则 R 是自内射的当且仅当 R_e 是自内射的. 此外，R 是 Quasi-Frobenius 环当且仅当 R_e 是 Quasi-Frobenius 环.

证明 因为 $R=\bigoplus\limits_{\in G}R_g$，所以由推论 8.3.7 知 R 是自内射的当且仅当 R_e 是自内射的. 由文献[65]中定理 1.1 知，R 是右 Noether 环当且仅当 R_e 是右 Noether 环. 从而 R 是 Quasi-Frobenius 环当且仅当 R_e 是 Quasi-Frobenius 环.

推论 8.3.10 设 G 是有限群，$n=|G|$，$R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，又设 $Q\in\mathscr{C}_R$，若 Q 中无 n-挠元素，则 Q 是 R-内射模当且仅当它是 R_e-内射模.

证明 若 Q 是一个内射 R_e-模，设 $E(Q)$是 Q 作为 R-模时的内射包络，则显然 $E(Q)$中没有 n-挠元素. 由文献[65]中的推论 2.1 知，作为 R_e-模时，$E(Q)$也是 Q 的本质扩张. 因为 Q_{R_e}内射，所以 $E(Q)=Q$. 若 Q 是一个内射 R 模，则由定理 8.3.6(iii)立即可知 Q 是一个内射 R_e-模.

推论 8.3.11 设 G 是有限群，$n=|G|$，又设 $R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，若 n 在 R_e 中可逆，则 R 是左遗传的(对应地，半遗传的)当且仅当 R_e 是左遗传的(对应地，半遗传的).

证明 设 R 是左遗传环(或半遗传环)，I 是 R_e 的左理想(或有限生成左理想)，则 RI 是 R 的左理想(或有限生成左理想). 从而 RI 是投射左 R-模. 因为 $RI\cong R\otimes_{R_e}I=(\bigoplus_{g\in G}R_g)\otimes_{R_e}I$，$R$ 是左遗传(或半遗传)的，而且 R 是投射 R_e-模，所以 RI 是投射左 R_e-模. 从而 $I\cong R_e\otimes_{R_e}I$ 作为 RI 的直和项，也是投射左 R_e-模. 故 R_e 是左遗传(或半遗传)的.

反之设 R_e 是左遗传(或半遗传)环. 又设 $K\subseteq R$ 是 R 的左理想(或有限生成左理想)，则存在一个(有限)集合 F 使得

$$R^{(F)}\xrightarrow{\varphi}K\xrightarrow{i}R,$$

其中 φ 是一个 R-满同态，i 是嵌入同态. 由引理 8.3.1(i)知 R 是有限生成投射左 R_e-模. 而 R_e 是左遗传(或半遗传)的，所以 K 是投射 R_e-模. 从而存在一个 R_e-同态 $\psi:K\to R^{(F)}$使得 $\varphi\psi=1_K$. 考虑像引理 8.3.2 前面(1)式一样定义的 R-同态$\tilde{\psi}:K\to R^{(F)}$，使

$$\tilde{\psi}(x)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}a_i^g\psi(b_i^b x),\ \forall\ x\in K.$$

因为 φ 是 R-同态，容易直接验证$\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\tilde{\psi}\right)\right)(x)=x$，即 $\varphi\left(\frac{1}{n}\tilde{\psi}\right)=1_K$. 从而 φ 是分裂 R-同态. 所以 K 是投射 R-模. 因此 R 是左遗传(或半遗传)环.

设 G 是有限群，$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，$M\in\mathscr{C}_R$. 我们有下述经典正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\alpha\longrightarrow R\otimes_{R_e}M\xrightarrow{\alpha}M\longrightarrow 0,$$

其中 $\alpha(\lambda\otimes x)=\lambda x$，$\forall\ \lambda\in R$，$\forall\ x\in M$ 和正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\beta}\mathrm{Hom}_{R_e}(R,\ M)\longrightarrow \mathrm{Coker}\beta\longrightarrow 0,$$

其中 $\beta(m)(\lambda)=\lambda m$，$\forall\ \lambda\in R$，$\forall\ m\in M$. 若第一个正合列分裂，则称 M 为弱 R-投射模；若第二个正合列分裂，则称 M 为弱 R-内射模(参见文献[17]). 因为 R 作为 R_e 模时是投射的，所以由文献[17](P. 50)知，M 是 R-投射模(R-内射模)当且仅当 M 是弱 R-投射的且是 R_e-投射的(M 是弱 R-内射的且是 R_e-内射的).

在引理 8.3.2 之后，我们定义了 R-正则模的概念，并指出了当 $|G|$ 在 R_e 中可逆时，每个 R-模都是正则模. 但当 $|G|$ 在 R_e 中不可逆，有例子表明并不是每个 R-模都是 R-正则的. 下面引理告诉我们，在任何情况下，每个分次模总是正则的.

引理 8.3.12 设 G 是有限群，R 是强 G-分次环，若 M 是一个分次 R-模，则 M 是 R-正则的.

证明 设 $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$，对任一 $m\in M$，记 $m=\sum_{g\in G}m_g$. 定义 $f\in\mathrm{Hom}_{R_e}(M,\ M)$，$f(m)=m_e$，则有 $\tilde{f}=1_M$. 因为对任意 $m\in M_h$，

$$\tilde{f}(m)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}f(ma_i^g)b_i^g=\sum_{I_h}f(ma_i^h)b_i^h=\sum_{I_h}ma_i^hb_i^h$$
$$=m\sum_{I_h}a_i^hb_i^h=m,$$

所以 $\tilde{f}=1_M$，即 M 是 R 正则的.

引理 8.3.13 设 G 是有限群，R 是强 G-分次环，M 是右 R 模，若 M 是 R-正则的，则 M 的任一直和项也是 R-正则的.

证明 设 G，R，M 满足所述条件且设 $M'\subseteq M$ 是 M 的一个直和项. 令 $i:M'\to M$ 和 $\pi:M\to M'$ 分别为经典嵌入和投射同态，则有 $\pi i=1_{M'}$. 因为 M 是 R-正则的，由定义，存在 $f\in\mathrm{Hom}_{R_e}(M,\ M)$，使得 $\tilde{f}=$

1_M. 定义 $f'=\pi f i: M'\to M'$，若 $m\in M'$，则有

$$\widetilde{f'}(m)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g} f'(ma_i^g)b_i^g=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}\pi f i(ma_i^g)b_i^g$$

$$=\pi\sum_{g\in G}\sum_{I_g} f(ma_i^g)b_i^g=\pi\tilde{f}(m)=\pi(m)=m.$$

所以$\widetilde{f'}=1_{M'}$. 于是 M' 是 R-正则的.

定理 8.3.14 设 G 是有限群，R 是强 G-分次环，M 是左 R-模，则下列陈述等价：

(i) M 是弱 R-内射的；

(ii) M 是弱 R-投射的；

(iii) M 是 R-正则的.

证明 (i)⇒(iii) 因为 M 是弱 R-内射的，所以由定义知

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\beta}\mathrm{Hom}_{R_e}(R, M)\longrightarrow \mathrm{Coker}\beta\longrightarrow 0$$

分裂正合. 从而 M 同构于 $\mathrm{Hom}_{R_e}(R, M)$的一个直和项. 因为 $\mathrm{Hom}_{R_e}(R, M)$ 是一个分次 R 模，$(\mathrm{Hom}_{R_e}(R, M))_g=\mathrm{Hom}_{R_e}(R_{g^{-1}}, M)$，所以由引理 8.3.12 知 $\mathrm{Hom}_{R_e}(R, M)$是 R-正则的. 再由引理 8.3.13 便知 M 是 R-正则的.

(ii)⇒(iii) 考虑分次 R-模 $Y=R\otimes_{R_e}M$，与上面(i)⇒(iii)的证明完全类似，可证 M 是 R-正则的.

(iii)⇒(i) 设 M 是 R-正则的，由定义存在 $u\in\mathrm{Hom}_{R_e}(M, M)$，使得 $\tilde{u}=1_M$. 现定义

$$\nu: \mathrm{Hom}_{R_e}(R, M)\longrightarrow M,$$

$$f\mapsto \nu(f)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g} uf(a_i^g)b_i^g.$$

对任一 $h\in G$，任一 $\lambda\in R_h$，首先我们有

$$\lambda a_i^g=\sum_{I_{gh^{-1}}} a_j^{gh^{-1}}b_j^{gh^{-1}}\lambda a_i^g=\sum_{I_{gh^{-1}}} a_j^{gh^{-1}}(b_j^{gh^{-1}}\lambda a_i^g).$$

易知 $b_j^{gh^{-1}}\lambda a_i^g\in R_e$. 所以$\forall\ \lambda\in R_h$ 就有

$$\nu(f\lambda)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}(uf\lambda)(a_i^g)b_i^g=\sum_{g\in G}\sum_{I_g} uf(\lambda a_i^g)b_i^g$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{I_g}\sum_{I_{gh^{-1}}} uf(a_j^{gh^{-1}}(b_j^{gh^{-1}}\lambda a_i^g))b_i^g$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{I_g}\sum_{I_{gh^{-1}}} uf(a_j^{gh^{-1}})b_j^{gh^{-1}}\lambda a_i^g b_i^g$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{I_g} uf(a_j^{gh^{-1}})b_j^{gh^{-1}}\lambda$$

$$=\nu(f)\lambda.$$

从而 ν 是一个 R-同态. 若 $m\in M$, 则

$$(\nu\beta)(m)=\nu\beta(m)=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}(u\beta(m))(a_i^g)b_i^g=\sum_{g\in G}\sum_{I_g}u(ma_i^g)b_i^g$$

$$=\tilde{u}(m)=1_M(m)=m.$$

所以 $\nu\beta=1_M$. 从而序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\beta}\mathrm{Hom}_{R_e}(R,M)\longrightarrow \mathrm{Coker}\beta\longrightarrow 0$$

分裂. 故 M 是弱 R-内射的.

(iii)⇒(ii) 证明过程与上面(iii)⇒(i)是对偶的. 我们把这个证明留给读者, 详细证明可参阅文献[65](定理 2.2).

推论 8.3.15 设 G 是有限群, $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是一个强 G-分次环, 若 M 是正则 R-模, 则

$$\mathrm{pd}_R M=\mathrm{pd}_{R_e}M$$

和

$$\mathrm{Id}_{R_e}M=\mathrm{Id}_R M.$$

证明 由定理 8.3.6 知, 我们只需证明当 $\mathrm{pd}_{R_e}M<\infty$ 时 $\mathrm{pd}_R M<\infty$; 当 $\mathrm{Id}_{R_e}M<\infty$ 时 $\mathrm{Id}_R M<\infty$.

设 $\mathrm{pd}_{R_e}M<\infty$, 因为 R 作为 R_e-模是投射的, 所以 $\mathrm{pd}_R(M\otimes_{R_e}R)<\infty$. 又因为 M 是 R-正则的, 所以由定理 8.3.14 知 M 是弱 R-投射的. 从而序列

$$0\to \mathrm{Ker}\alpha\to M\otimes_{R_e}R\xrightarrow{\alpha}M\to 0$$

分裂正合. 所以 M 同构于 $M\otimes_{R_e}R$ 的一个直和项. 因此必有 $\mathrm{pd}_R M<\infty$.

设 $\mathrm{Id}_{R_e}M<\infty$, 由推论 8.3.8 得

$$\mathrm{Id}_R(M\otimes_{R_e}R)<\infty.$$

因为 M 是 R-正则的，所以根据定理 8.3.14 知 M 是弱 R-投射的. 与上面的讨论相同，可知 M 同构于 $M\otimes_{R_e}R$ 的一个直和项. 从而 $\mathrm{Id}_RM<\infty$.

推论 8.3.16 设 G 是有限群，$R=\oplus_{g\in G}$是强 G—分次环，且 $\mathrm{r.gl.dim}R_e<\infty$，又设 M 是右 R-模，则

$$\mathrm{pd}_RM<\infty\text{当且仅当 }\mathrm{Id}_RM<\infty.$$

证明 设 $\mathrm{pd}_RM=n<\infty$，则 M 有一个长度为 n 的投射分解

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0. \tag{4}$$

显然自由 R-模是 R-正则的，并由引理 8.3.13 知每个投射 R-模必是正则的. 从而 $P_i,i=0,\cdots,n$ 都是 R-正则的. 根据推论 8.3.15 得

$$\mathrm{Id}_RP_i=\mathrm{Id}_{R_e}P_i\leqslant\mathrm{r.gl.dim}R_e<\infty.$$

利用序列(4)和归纳法即可证明 $\mathrm{Id}_RM<\infty$. 对偶地，我们可以证明当 $\mathrm{Id}_RM<\infty$时，必有 $\mathrm{pd}_RM<\infty$.

定理 8.3.17 设 G 是有限群，$R=\oplus_{g\in G}R_g$ 是强 G-分次环，H 是 G 的子群.

(i) 若 $\mathrm{r.gl.dim}(R)<\infty$，则

$$\mathrm{r.gl.dim}(R_e)=\mathrm{r.gl.dim}(R_H)=\mathrm{r.gl.dim}R.$$

(ii) 设$|G|$在 R_e 中可逆，则对每个右 R-模 P，R_{R_e}是投射的(内射的)当且仅当 P_R 是投射的(内射的). 此外，对每个右 R-模 M，

$$\mathrm{pd}(M_R)=\mathrm{pd}(M_{R_e});\ \mathrm{Id}(M_R)=\mathrm{Id}(M_{R_e}).$$

(iii) 若$|G|$在 R_e 中可逆，则

$$\mathrm{r.gl.dim}(R_e)=\mathrm{r.gl.dim}(R_H)=\mathrm{r.gl.dim}(R).$$

证明 (i) 设 $\mathrm{r.gl.dim}(R)<\infty$，则存在右 R-模 M 使得$\mathrm{pd}(M_R)=\mathrm{r.gl.dim}(R)$. 由定理 8.3.6(iii)得

$$\mathrm{pd}(M_{R_e})=\mathrm{pd}(M_R)=\mathrm{r.gl.dim}(R).$$

再由引理 8.3.1(i)得

$$\mathrm{r.gl.dim}(R_e)=\mathrm{r.gl.dim}(R).$$

同理有 $$\mathrm{r.gl.dim}(R_e)=\mathrm{r.gl.dim}(R_H).$$

(ii) 因为 $|G|$ 在 R_e 中可逆，所以由命题 8.3.3 前面的说明知，任一右 R-模都是 R-正则的. 从而由推论 8.3.15 立即得到(ii)中的结论.

(iii) 结合(ii)及引理 8.3.1(ii)便得所需结果.

8.4 交叉积和斜群环的同调维数

关于交叉积的素性、半素性以及一些类型的商环的许多性质都有了较多的研究，主要研究成果已概括在文献[71]中. 然而关于交叉积的同调性质等还有待我们作进一步的研究，目前还有许多待解决的问题，这也是当前环论研究的方向之一. 在本节中我们研究交叉积和斜群环的同调维数，这里的结果主要来自文献[92～93]，也有一些结果来自文献[10]、[7～8]和[64].

关于交叉积，我们也有 Maschke 定理. 实际上它是上节给出的关于强群分次环的一些对应定理的特殊情形. 我们把它陈述如下而略去其证明. 有兴趣的读者可参阅给出的参考文献.

定理 8.4.1 设 R 是环，G 是有限群且 $|G|$ 在 R 中可逆，又设 $S=R*G$ 是交叉积，M 是右 S-模，则有

(i) 若 $K\leqslant M_S$，且作为 R-模 K 是 M 的直和项，则作为 S-模，K 亦为 M 的直和项；

(ii) $\mathrm{pd}M_R=\mathrm{pd}M_S$；

(iii) $\mathrm{r.gl.dim}R=\mathrm{r.gl.dim}S$（文献[64] 定理 7.5.6）.

利用上述定理，我们可以得到下述结果.

推论 8.4.2 设 R 是环、G 是群，$R*G$ 是交叉积，则有

(i) $\mathrm{r.gl.dim}R\leqslant \mathrm{r.gl.dim}R*G$；

(ii) 若 G 是 Poly-infinite cyclic 且 Hirsch 数为 h，则

$$\mathrm{r.gl.dim}R*G\leqslant \mathrm{r.gl.dim}R+h;$$

(iii) 若 R 是有理数域上的代数，G 是 Polycyclic-by-finite 群，Hirsch 数为 h，则 $\mathrm{r.gl.dim}R*G\leqslant \mathrm{r.gl.dim}R+h$（文献[64] 推论 7.5.6）.

设 R 是环，G 是群，$R*G$ 是交叉积，又设这个交叉积由映射 $\tau:G\times G\to U(R)$ 和映射 $\sigma:G\to \mathrm{Aut}(R)$ 定义. 为了以后叙述的方便，我们有时将这一交叉积记为 $R*G=R_\sigma^\tau G$. 在本章第二节中，我们对群环给出了 Serre 定理，Aljadeff 将 Serre 定理推广到了交叉积上. 我们将关于交叉积的 Serre 定理陈述如下，而略去其证明，读者可参考给出的文献.

定理 8.4.3 设 R 是环，G 是群，H 是 G 的子群，它具有有限指数. 若 $R_\sigma^\tau G$ 是一交叉积，则下列陈述等价：

(i) $\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau G<\infty$;

(ii) $\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau H<\infty$，且对 G 的任意有限子群 F，皆有

$$\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau F<\infty.$$

此外，当上述条件满足时，

$$\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau G=\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau H$$（文献[7]定理 0.3).

设 R 是交换环，G 是群，$R_\sigma^\tau G$ 是交叉积，并由映射 τ 和 σ 定义. 因为 R 是交换的，若我们不考虑映射 τ，则得一扭群环 $R_\sigma G$；若进一步我们对 σ 和 τ 都不考虑，则得一群环. 事实上，这三个环 $R_\sigma^\tau G$，$R_\sigma G$，RG 之间的同调维数满足一定的关系. 我们将其称之为"重力原理"，即结构越多，同调维数越小. 这一结论由 Aljadeff 和 Rosset 在文献[10] § 3 中给出，读者也可参看文献[8]的 0.4. 我们将结论陈述如下.

定理 8.4.4 设 R 是交换环，G 是群，$R_\sigma^\tau G$ 是交叉积，则有

$$\mathrm{r.gl.dim}R_\sigma^\tau G\leqslant \mathrm{r.gl.dim}R_\sigma G\leqslant \mathrm{r.gl.dim}RG.$$

上面我们已经列举出了关于交叉积的同调维数的一些经典结果，下面我们重点研究交叉积的同调维数有限性问题. 对有限群与右 FBN 左凝聚环的交叉积，我们给出一个它具有有限整体维数的充分条件. 当系数环是交换环，且交叉积为斜群环时，我们得到了一些这一斜群环具有有限整体维数的充分必要条件. 下面的结果主要引自文献[92～93].

首先我们从交叉积的一些基本性质和它的半单 Artin 性质开始.

引理 8.4.5 设 R 是环，G 是群，$R_\sigma^\tau G$ 是交叉积. 若 $R=T\oplus S$ 是 R 的环直和分解，$\forall g\in G$ 满足 $T^g\subseteq T$，$S^g\subseteq S$，则

$$R_\sigma^\tau G \cong T_\beta^{\tau_1} G \oplus S_\gamma^{\tau_2} G,$$

其中 τ_1，τ_2 是 τ 在 T 和 S 上的限制，以及

$$\sigma(g_1, g_2) = \beta(g_1, g_2) + \gamma(g_1, g_2), \ \forall\ g_1, g_2 \in G.$$

证明 设引理中的条件满足，则显然存在交叉积 $T_\beta^{\tau_1} G$ 和 $S_\gamma^{\tau_2} G$. 直接验证可知下面映射是环同构

$$\varphi: R_\sigma^\tau G \to T_\beta^{\tau_1} G \oplus S_\gamma^{\tau_2} G,$$

$$\sum \overline{g}_i (t_i + s_i) \mapsto \sum \overline{g}_i t_i + \sum \overline{g}_i s_i,$$

其中 $g_i \in G$，$t_i \in T$，$s_i \in S$.

定理 8.4.6 设 R 是环，G 是有限群，$R * G$ 是交叉积.

(i) 设 $R = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ 是 R 的一个环直和分解，G 置换集合 $\{S_1, \cdots, S_n\}$，令

$$\Omega_j = \{S_k \mid S_k^g = S_j, \text{对某一 } g \in G\} \ (j = 1, \cdots, m)$$

是 G 作用于 $\{S_1, \cdots, S_n\}$ 的轨迹，又令 $m_i = [G : G_{s_i}]$，其中 $G_{s_i} = \{g \in G \mid S_i^g = S_i\}$，则

$$R * G \cong \oplus_{i=1}^m M_{m_i}(S_i * G_{s_i}),$$

其中 $M_q(S)$ 表示 S 上的 q 阶全矩阵环. 从而有

$$\text{r.gl.dim}(R * G) = \text{Max}_{i=1}^n \{\text{r.gl.dim}(S_i * G_{S_i})\}.$$

(ii) 设 R 是半单 Artin 环，$R = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$，其中每个 S_i 是单 Artin 环，则 $R * G$ 是半单 Artin 的当且仅当每一 $S_i * G_{s_i}$ 是半单 Artin 环，$i = 1, 2, \cdots, n$，其中 G_{s_i} 与(ii)中给出的相同.

证明 设 R，G，$R * G$ 满足所要求的条件.

(i) 设 S_i，M_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ 和 Ω_j，$j = 1, 2, \cdots, m$，如同定理所述，由引理 8.4.5 知 $R * G$ 可分解为下述交叉积的环直和

$$T_i = (\oplus_{S \in \Omega_i} S) * G.$$

令 $e_i \in S_i$ 是 S_i 的单位元，并记 $G = \bigcup_{j=1}^{m_i} G_{s_i} g_j$(不相交并)，则$1 = \sum_{j=1}^{m_i} e^{g_j}$是 T_i 的单位元分解为正交幂等元的一个分解. 而$U(T_i)$的子群 $U(\oplus_{S \in \Omega_i} S)\overline{G}$传递地置换这些正交幂等元，其中$U(\quad)$代表由单位作

成的群，可以验证 $e_iT_ie_i=S_i*G_{s_i}$. 由文献[70]中引理 6.1.6 得

$$R*G\cong\oplus_{i=1}^{m}M_{m_i}(S_i*G_{s_i}).$$

从而有

$$\text{r. gl. dim}(R*G)=\text{Max}_{i=1}^{n}\{\text{r. gl. dim}(S_i*G_{s_i})\}.$$

(ii) 设 R 是半单 Artin 环，则 $R=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_n$，其中每个 S_i 是单 Artin 环. 因为每个 S_i 是 R 的极小理想，所以 G 置换集合 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$. 再由(i)可直接推出(ii).

利用定理 8.4.6，我们可以得到下面有用的定理.

定理 8.4.7 设 G 是有限群，R 是半单 Artin 环，$R=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_n$，其中 S_i 都是单 Artin 环，$i=1, 2, \cdots, n$. 设 $R*G$ 是一交叉积，对每一 i 定义

$H_i=\{g\in G\mid S_i^g=S_i$ 且 g 作用于 S_i 是由某可逆元导出的共轭$\}$.

令 $N_i=\begin{cases}1, & \text{若 Char}(S_i)=0,\\ H_i \text{ 的一个 Sylow } p_i\text{-子群}, & \text{若 Char}(S_i)=p_i.\end{cases}$

(i) $R*G$ 是半单 Artin 的当且仅当 S_i*N_i 是单 Artin 环，$i=1, 2, \cdots, n$.

(ii) $R*G$ 是半单 Artin 环当且仅当 S_i*P_i 是单 Artin 环，$i=1, 2, \cdots, n$ 和 N_i 的任一初等 Abel 子群 P_i(参见文献[35]关于初等 Abel 群的定义).

证明 设 $R, G, R*G, N_i$ 和 H_i 满足所述条件.

(i) ($\Rightarrow$) 设 $R*G$ 是半单 Artin 环，由引理 8.4.5 和引理 8.3.1(ii)知，S_i*N_i 是半单 Artin 环. 从而由[56]中推论 3.10 知，S_i*N_i 是单 Artin 环.

($\Leftarrow$) 假设 $S_i*N_i(i=1, 2, \cdots, n)$是单 Artin 环，由文献[71]中推论 18.11 和推论 12.6 知，$S_i*G_{s_i}$是半单 Artin 环. 又由定理 8.4.6 (ii)知，$R*G$ 是半单 Artin 环.

(ii) 由引理 8.3.1(ii)，文献[71]中定理 18.10 和[56]中推论 3.10 知，S_i*N_i 是单 Artin 环当且仅当对 N_i 的每一初等 Abel 子群 P_i，S_i*P_i 是单 Artin 环. 从而由(i)即可得(ii).

由定理 8.4.7 知，$R*G$ 的半单 Artin 性问题可转化对 $S*P$ 的单 Artin 性来研究，其中 S 是一个单 Artin 环，$\mathrm{Char}(S)=p>0$，P 是一个初等 Abel p-群. 因为 P 是初等 Abel 群，所以 P 形如 $P=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n$，其中每个 P_i 是阶为 p 的循环群. 由引理 8.1.2 知

$$S*P\cong((S*P_1)*\cdots*P_{n-1})*P_n.$$

从而 $S*P$ 是单 Artin 的当且仅当 $((S*P_1)*\cdots*P_{i-1})*P_i$ 都是单 Artin 环 $(i=0, 1, \cdots, n)$，$P_0=(1)$.

由上面的讨论知，我们对半单 Artin 性的研究可简化为研究 $S*P$ 的单 Artin 性，其中 S 是单 Artin 环，$\mathrm{Char}(S)=p>0$，P 是循环 p-群. 下面我们给出一个结果，部分回答了上述问题.

命题 8.4.8 设 S 是单环（不一定是 Artin 的）$\mathrm{Char}(S)=p>0$，令 $P=\langle g\rangle$ 是阶为 p 的循环群，又设 P 共轭作用于 S，$S*P$ 是一斜群环，则下列陈述等价：

(i) $S*P$ 是单环；

(ii) 若 $v\in S$ 使得 $s^g=vsv^{-1}$，$\forall\ s\in S$，则 $v^p\neq 1$；

(iii) $S*P$ 不同构于 P 在 S 上的群环.

证明 设 S，P，$S*P$ 满足所述条件.

(i)⇒(iii)⇒(ii)是显然的.

(ii)⇒(i) 设条件(ii)满足，因为 P 共轭作用于 S，所以存在 S 中可逆元 v，使得 $s^g=vsv^{-1}$，$\forall\ s\in S$. 由文献[37]中命题 1.1(b)知，$S*P$ 是单环当且仅当它的中心是域. 记它的中心为 $C(S*P)$，又设 K 是 S 的中心，由文献[37]中命题 1.6(ii)，得

$$C(S*P)=K[vg]\cong K[Z]/(Z^p-v^p),$$

其中 Z 为 K 上未定元. 再由文献[43]中引理(P. 225)知，$C(S*P)$是域当且仅当(Z^p-v^p)是 $K[Z]$的极大理想，当且仅当 v^p 不是 K 中一元素的 p 次幂. 若 $v^p=k^p$，$k\in K$，则 $k\neq 0$，$(k^{-1}v)^p=k^pv^p=1$，$s^g=vsv^{-1}=(k^{-1}v)s(k^{-1}v)^{-1}$. 于是与(ii)矛盾.

设 R 是一个环，G 是一群，$R*G$ 是一交叉积. 又设 I 是 R 的理想，若$\forall\ g\in G$，都有 $I^g=I$，则称 I 是 G-不变理想（参见文献[71]）. 为

以后叙述方便，对 R 的任一理想 M，我们把 $\bigcap_{g\in G} M^g$ 记为 M^0. 显然 M^0 是包含在 M 中的最大的 G-不变理想.

定理 8.4.9 设 R 是环，G 是有限群，$R*G$ 是交叉积，又设 M 是 R 的一个极大理想，则有

$$(R/M^0)*G\cong M_n((R/M)*(G_M)),$$

其中 $G_M=\{g\in G\mid M^g=M\}$，$n=[G:G_M]$. 特别地 $(R/M^0)*G$ 是半单 Artin 的当且仅当 $(R/M)*G_M$ 是半单 Artin 的.

证明 设 R，G，M，n 满足所述条件，令 $G=\bigcup_{i=1}^n G_M g_i$（不相交并），$g_1=e$，则

$$M^0=\bigcap_{g\in G} M^g=M^{g_1}\cap M^{g_2}\cap\cdots\cap M^{g_n},$$

其中 M^{g_1}，M^{g_2}，…，M^{g_n} 互不相同. 由中国剩余定理可得

$$R/M^0\cong R/M^{g_1}\oplus R/M^{g_2}\oplus\cdots\oplus R/M^{g_n}.$$

将 R/M^{g_i} 看作为 R/M^0 的理想，则 G 传递地置换集合 $\{R/M, R/M^{g_2}, \cdots, R/M^{g_n}\}$，并且 $(R/M)^g=R/M^g$，$\forall\ g\in G$. 又根据定理 8.4.6(i)的证明，得

$$(R/M^0)*G\cong M_n((R/M)*G_M).$$

特别地，$(R/M^0)*G$ 是半单 Artin 的当且仅当 $(R/M)*G_M$ 是半单 Artin 的.

一个环 R 称为右 Bounded，如果 R 的任一本质右理想包含 R 的一个理想，当把这个理想看作为 R 的右理想时，它也是本质的. 环 R 称为右 Fully Bounded，如果 R 模去它的任一素理想所得的商环都是 Bounded. 我们把一个 Fully Bounded 右 Noether 环简称为 FBN 环. FBN 环是一个很重要的环类，它包含所有交换 Noether 环，在中心上整的 Noether 环，Noether P. I. 环等. 关于它们的基本性质等可参见文献[34]Chapter 8.

下面是关于 FBN 环的一个非常重要的结果，我们将其叙述如下，而略去其证明.

命题 8.4.10 设 R 是右 FBN 环，若 P 是 R 的一个右本原理想（特别地若 P 是 R 的极大理想），则 R/P 是一个单 Artin 环（文献[34]

的命题 8.4).

在证明本节的一些主要结果时，我们要用到下面的引理：

引理 8.4.11 设 G 是有限群，R 是右 FBN 环，$S=R*G$ 是交叉积，则 S 也是右 FBN 的. 设 M^* 是 S 的一个极大理想，则 $M^*\cap R=\bigcap_{g\in G}M^g$，其中 M 是 R 的一个极大理想. 特别地 $R/(M^*\cap R)$ 是半单 Artin 环.

证明 设 R, G, S 满足所述条件，因 $S=R*G$ 是一个有限生成 R-模，故由文献[55]中命题 4.9 知 $S=R*G$ 是右 FBN 的. 设 M^* 是 S 的一个极大理想，由文献[71]中引理 14.2(i)，有 $M^*\cap R=\bigcap_{g\in G}M^g$，其中 M 是 $M^*\cap R$ 的一个极小素理想. 利用文献[71]中定理 16.6 可推知，M 是 R 的极大理想. 又用命题 8.4.10 可以证明 $R/(M^*\cap R)$ 是半单 Artin 环.

现在我们证明本节的一个主要结果.

定理 8.4.12 设 R 是右 FBN 左凝聚环且 $\mathrm{r.gl.dim}R<\infty$，又设 G 是有限群，$S=R*G$ 是交叉积. 若对 R 的每个极大理想 M，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$(R/M)*G_M$ 都是半单 Artin 环，其中

$$G_M=\{g\in G\mid M^g=M\},$$

则 $\mathrm{r.gl.dim}(R*G)=\mathrm{r.gl.dim}(R)<\infty$.

证明 设 R, S, G 满足所述条件，由引理 8.4.11 知，$S=R*G$ 是右 FBN 环. 因 $R*G$ 是秩有限的自由左 R-模，故由文献[76](P.266 练习 8 和练习 9′)知，对任意集合 A，作为右 $R*G$-模都有

$$R^A\otimes_R(R*G)\cong(R\otimes_R(R*G))^A\cong(R*G)^A.$$

因为 R 是左凝聚的，所以 R^A 是平坦右 R-模. 从而 $(R*G)^A\cong R^A\otimes_R(R*G)$ 也是平坦右 $R*G$-模. 于是 $R*G$ 是左凝聚环.

设 I 是 R 的右理想，因为 $\mathrm{r.gl.dim}(R)<\infty$，所以存在 $(R/I)_R$ 的一个有限投射分解：

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to R/I\to 0.$$

由于 $_RS$ 是自由模，因此

$$0\to P_n\otimes_R S\to\cdots\to P_0\otimes_R S\to(R/I)\otimes_R S\to 0$$

是右 S-模 $(R/I)\otimes_R S\cong S/IS$ 的一个投射分解. 所以我们得到

$$\mathrm{pd}(S/IS)_S\leqslant \mathrm{pd}(R/I)_R\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R). \tag{1}$$

下面，我们证明对任一单右 S-模 V_S，都有 $\mathrm{pd}V_S\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R)$. 设 $M^*=\mathrm{Ann}_S(V)$，由引理 8.4.11 知，S 是右 FBN 的. 从而由命题 8.4.10 知，M^* 是 S 的极大理想，且 S/M^* 是单 Artin 环. 于是存在一个正整数 n，使得作为右 S-模时 $V^{(n)}\cong S/M^*$. 继而得

$$\mathrm{pd}(V_S)=\mathrm{pd}_S(V^{(n)})=\mathrm{pd}_S(S/M^*). \tag{2}$$

又由引理 8.4.11 可知，$R/(M^*\cap R)$ 是半单 Artin 环，且有 R 的极大理想 M，使得

$$M^*\cap R=\bigcap_{g\in G}M^g=M^0.$$

若 $\mathrm{Char}(R/M)=0$，则根据定理 8.4.1(iii) 得

$$\mathrm{r.gl.dim}((R/M^0)*G)=\mathrm{r.gl.dim}R/M^0=0.$$

所以 $(R/M^0)*G$ 是半单 Artin 环. 若 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$，则由假设知，$(R/M)*G_M$ 是半单 Artin 环. 从而由定理 8.4.9 知，$(R/M^0)*G$ 是半单 Artin 环. 于是 $(R/M^0)*G$ 总是半单 Artin 环. 又因为

$$\begin{aligned}S/(M^*\cap R)S&=(R*G)/((M^*\cap R)*G)\\&\cong(R/(M^*\cap R))*G=(R/M^0)*G,\end{aligned}$$

所以 $S/(M^*\cap R)S$ 是一个半单右 S-模. 由于我们有右 S-模的正合列

$$0\to M^*/((M^*\cap R)S)\to S/((M^*\cap R)S)\to S/M^*\to 0, \tag{3}$$

而 $S/((M^*\cap R)S)$ 是半单右 S-模，因此 (3) 分裂正合. 从而作为右 S-模有

$$S/((M^*\cap R)S)\cong(S/M^*)\oplus(M^*/((M^*\cap R)S)). \tag{4}$$

结合 (2)、(4) 和 (1)，得

$$\begin{aligned}\mathrm{pd}(V_S)&=\mathrm{pd}(S/M^*)_S\leqslant \mathrm{pd}(S/((M^*\cap R)S))\\&\leqslant \mathrm{pd}(R/(M^*\cap R)_R\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R).\end{aligned}$$

再由文献[72]中定理 8，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{r.gl.dim}(S)&=\sup\{\mathrm{pd}(V_S)\mid V_S \text{ 是单的}\}\\&\leqslant \mathrm{r.gl.dim}(R)<\infty.\end{aligned}$$

最后根据定理 8.3.17(i)，便得

$$\text{r. gl. dim}(R*G)=\text{r. gl. dim}(R)<\infty.$$

定理 8.4.12 中给出的条件是 $R*G$ 具有有限整体维数的一个充分条件. 有例子表明，即使对一些较特殊的情形，这一条件也不是必要的(参见文献[93]). 但当系数环 R 是交换 Noether 环且交叉积为斜群环时，定理 8.4.12 给出的条件确实是充要条件，并且在这种情形下，我们还可得到更多的充要条件.

为论述方便，我们先定义一个概念. 设 R 是一个环，G 是一个群，它作用于 R 之上. 对 R 的任一理想 M，定义

$$G(M)=\{g\in G\mid r^g-r\in M,\ \forall\ r\in R\},$$

通常称之为 M 的惯性群.

通过直接计算，便可得到关于 $G(M)$ 的下述一些性质.

引理 8.4.13 设 R 是环，G 是群，它作用于 R，M 是 R 的一个理想.

(i) 设 H 是 G 的子群，使得 M 是 H-不变的，且 H 作用于 R/M 上是平凡的，则 $G(M)$ 是满足这种条件的 G 的子群中的唯一最大元；

(ii) 若 N，M 都是 R 的理想且 $N\subseteq M$，则 $G(N)\subseteq G(M)$；

(iii) 若 $N\subseteq M$ 是 R 的理想且 N 是 G-不变的，则 $G(M)=G(M/N)$.

命题 8.4.14 设 R 是环，G 是有限群，$S=R*G$ 是斜群环. 若有 R 的一个真理想 M，使得 $\text{Char}(R/M)=m>0$，且 $G(M)$ 中含有一个不等于 e 的元 g，g 的阶整除 m，则 $\text{r. gl. dim}(R*G)=\infty$.

证明 设 R，G，M，S 满足所述条件. 又设 $g\in G(M)$，$g\neq e$，g 的阶整除 m. 我们可以假设 g 的阶为一素数 p，$m=pn$. 因为 $\text{Char}(R/M)=m=pn$，p 不是 R/M 的单位，所以 $pR+M$ 也是 R 的一个真理想，且 $\text{Char}(R/(pR+M))=p$. 由引理 8.4.13(ii)知，$g\in G(pR+M)$. 从而不失一般性，我们可以假设 $\text{Char}(R/M)=p$ 是素数，而 $G(M)$ 含有一个元 g，它的阶为 p. 根据推论 8.4.2(i)，得

$$\text{r. gl. dim}(R*\langle g\rangle)\leqslant\text{r. gl. dim}(R*G).$$

不失一般性，可设 G 是阶为 p 的循环群. 由引理 8.4.13(i)知，M 是 G-不变的，且 G 作用于 R/M 上是平凡的. 于是 $(R/M)*G$ 为通常的

群环.

令 $\hat{g}=1+g+\cdots+g^{p-1}$，容易验证序列

$$0 \longrightarrow \hat{g}S \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} (g\text{-}1)S \longrightarrow 0$$

和序列

$$0 \longrightarrow (g\text{-}1)S \xrightarrow{j} S \xrightarrow{\varphi} \hat{g}S \longrightarrow 0$$

是右 S-模的正合列，其中 i、j 是嵌入映射，φ 和 ψ 分别是由元素 $(g\text{-}1)$ 和 $\hat{g}$ 的左乘导出的同态.

设 $\hat{g}S$ 和 $(g\text{-}1)S$ 中有一个为投射 S-模，则 $S\cong(g\text{-}1)S\oplus\hat{g}S$. 在这一同构中，设 s_1，s_2 分别对应于 $g\text{-}1$ 和 $\hat{g}$，则 $S=s_1S\oplus s_2S$. 因为 $s_1\hat{g}$ 对应于 $(g-1)\hat{g}=0$，所以 $s_1\hat{g}=0$. 同理 $s_2\hat{g}=0$. 而在群环 $\bar{S}=S/MS=(R/M)[G]$中，$\hat{g}$ 是在中心中的一元，所以

$$(S/MS)\hat{g}=((s_1S+s_2S)/MS)\hat{g}=\bar{s}_1\bar{S}\hat{g}+\overline{s_2S}\hat{g}=\overline{s_1}\hat{g}\bar{S}+\overline{s_2}\hat{g}\bar{S}=0.$$

从而 $\hat{g}\in MS=M*G$. 于是 R 的单位 $1\in M$. 这与 M 是真理想矛盾. 因而 $\hat{g}S$ 和 $(g-1)S$ 都不是投射模. 最后由引理 8.2.1 便知，$\mathrm{r.gl.dim}(R*G)=\infty$.

现在我们可以证明本节的另一个主要结果了.

定理 8.4.15 设 R 是交换 Noether 环，G 是有限群，它作用于 R，又设 $R*G$ 是斜群环，则下列陈述等价：

(i) $\mathrm{gl.dim}(R*G)<\infty$；

(ii) (a) $\mathrm{gl.dim}(R)<\infty$；

(b) 对 R 的每个极大理想 M，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$(R/M)*G_M$ 是半单 Artin 环；

(iii) (a) $\mathrm{gl.dim}(R)<\infty$；

(b) 对 R 的每个极大理想 M，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$G(M)$不含阶为 p 的元素.

证明 设 R，G，$R*G$ 满足所述条件.

(i)⇒(iii) 设 $\mathrm{gl.dim}(R*G)<\infty$，由推论 8.4.2(i)知，$\mathrm{gl.dim}(R)<\infty$. 又由命题 8.4.14 知，(iii)中的(b)也必满足.

(iii)⇒(ii) 设(iii)成立，又设 M 是 R 的一个极大理想，且

$\text{Char}(R/M)=p>0$. 若$(R/M)*G_M$不是半单 Artin 环，则由文献[71]中的推论 18.11 知，存在G_M的 Sylow$p$-子群P,使得$(G/M)*P$不是半单 Artin 环. 又由文献[62]中的定理 2.3 可知，P中至少有一元在R/M上的作用是共轭作用，即$\exists\ g\in G$，$g\neq 0$，g共轭作用于R/M. 再因为R/M是交换环，所以g作用于R/M上是平凡的. 继而由引理 8.4.13(i)，可得$g\in G(M)$. 这与(iii)的假设矛盾.

(ii)⇒(i) 直接由定理 8.4.12 推出.

命题 8.4.16 设R是交换 Noether 环，G是任意群，$R*G$是斜群环,又设H是G的子群，它具有有限指数，则下列陈述等价：

(i) $\text{gl.dim}(R*G)<\infty$；

(ii) (a) $\text{gl.dim}(R*H)<\infty$；

(b) 对R的任一极大理想M，当$\text{Char}(R/M)=p>0$时，对G的任一有 限子群T，$(R/M)*T_M$是半单 Artin 环；

(iii) (a) $\text{gl.dim}(R*H)<\infty$；

(b) 对R的任一极大理想M，当$\text{Char}(R/M)=p>0$时，$G(M)$不含阶为p的元素.

证明 设R，G，H，$R*G$满足所述条件.

(i)⇒(ii) 设$\text{gl.dim}(R*G)<\infty$，$M$是$R$的一个极大理想，且$\text{Char}(R/M)=p>0$，又设$T$是$G$的一个有限子群. 由推论 8.4.2(i)知，$\text{gl.dim}(R*H)<\infty$，$\text{gl.dim}(R*T)<\infty$. 再由定理 8.4.15 即知(ii)成立.

(ii)⇒(i) 假设(ii)成立，利用(ii)和定理 8.4.15 可知，对G的每个有限子群T，$\text{gl.dim}(R*T)<\infty$. 从而利用关于交叉积的 Serre 定理，即定理 8.4.3，可立即得到(i).

(i)和(iii)的等价性证明与上面关于(i)和(ii)的等价性证明类似，故略.

推论 8.4.17 设R是交换 Noether 环，G是 Polycyclic-by-finite 群，$R*G$是斜群环，则下列陈述等价：

(i) $\text{gl.dim}(R*G)<\infty$；

(ii) (a) $\text{gl.dim}(R)<\infty$；

(b) 对 R 的每个极大理想 M，G 的每个有限子群 T，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$(R/M)*T_M$ 是半单 Artin 环；

(iii) (a) $\mathrm{gl.dim}(R)<\infty$；

(b) 对 R 的每个极大理想 M，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$G(M)$ 中不含阶为 p 的元.

证明 因为 G 是 Polycyclic-by-finite 群，所以由文献[70]中的引理 10.2.5 知，存在 G 的一个正规子群 H，使得 H 在 G 中的指数是有限的，而 H 是 Poly-infinite Cyclic 的. 由于 R 具有有限整体维数，因此根据推论 8.4.2(ii)就知，$R*H$ 具有有限整体维数. 从而本推论的结果直接由命题 8.4.16 可得出.

推论 8.4.18 设 R 是交换 Noether 环，它具有有限整体维数，又设 G 是 Polycyclic-by-finite 群，且 $S=R*G$ 是一交叉积. 若下列条件之一满足，则 $\mathrm{gl.dim}(R*G)<\infty$.

(i) 对 R 的任一极大理想 M，G 的任一有限子群 T，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$时，都有$(R/M)*T_M$ 是半单 Artin 的；

(ii) 对 R 的任一极大理想 M，当 $\mathrm{Char}(R/M)=p>0$ 时，$G(M)$ 中不含阶为 p 的元素.

证明 设 R，G，$R*G$ 满足所述条件，且条件(i)被满足，由定理 8.4.3 和定理 8.4.12，与推论 8.4.17 的证明方法类似可证 $\mathrm{gl.dim}(R*G)<\infty$. 又设条件(ii)被满足，交叉积是由映射 σ 和 τ 确定，即$R*G=R_\sigma^\tau G$，则根据定理 8.4.4 可得

$$\mathrm{gl.dim}(R_\sigma^\tau G)\leqslant \mathrm{gl.dim}R_\sigma G,$$

其中 $R_\sigma G$ 是由映射 σ 决定的斜群环. 从而直接由推论 8.4.17(iii)可知 $\mathrm{gl.dim}(R_\sigma G)<\infty$. 所以 $\mathrm{gl.dim}(R*G)<\infty$.

参考文献

1 Auslander M. Homological dimension of modules and algebra (Ⅲ), global dimension. Nagoya Math J, 1955, 9

2 Auslander M. Homological dimension in Noetherian rings. Trans Amer Math Soc, 1958, 88

3 Auslander M. Coherent functors, Proc Cof Categorical Algebra. New York: Springer-Verlag, 1956

4 Auslander M, Buchsbaum D A . Homological dimension in local rings. Trans Amer Math Soc, 1957, 86

5 Auslander M ,Buchsbaum D A. Unique factorization in regular local rings. Proc Nat Acad Sci 1959, 45

6 Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of modules. New York: Springer-Verlag, 1974

7 Aljadeff E. Serre's Extension Theorem for crossed products. J London Math Soc, 1991, 44 (2)

8 Aljadeff E. Homological duality for Crossed products. J Algebra, 1990, 134

9 Atiyah M F, MacDonald. I G. Introduction to commutative Algebra. Raading: Addison-Wesley Publishing Company, 1969

10 Aljadeff E,RossetS. Global dimension of crossed products. J Pure and Applied Algebra, 1986, 40

11 Azumaya G. A duality theory for injective modules. Amer J Math, 1959, 81

12 Bass H. Finitisitic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. Trans Amer Math Soc, 1960, 95

13 Bass H. Injective dimension in Noetherian rings. Trans Amer Math Soc,1962, 102 (1)

14 Belshoff R G. Matlis reflexive modules. Comm in Algebra, 1991, 19 (4)
15 Brown K A, Hajarnavis C R, Maceacharn A B. Noetherian rings of finite global dimension. Proc Lond Math Soc, 1982, 44
16 Camillo V. Coherence for polynoimal rings. J Algebra, 1990, 132
17 Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra. Princeton: Princeton University Press, 1956
18 Chase S U. Direct products of modules. Trans Amer Math Soc, 1960, 97
19 Chevalley C. On the theory of local rings. Ann of Math, 1943, 44
20 Cohen M, Montgomery S. Group graded rings, Smash products and group action. Trans Amer Math Soc, 1984, 282
21 Colby R R. Rings which have flat injective modules. J Algebra, 1975, 35
22 Cheatham T J, Stone D R. Flat and projective character modules. Proc Amer Math Soc, 1981, 81
23 Cheng Fuchang, Tang Jinyu, Huang zhaoyong, Wang Mingyi. II-Coherent rings and FGT-injective dimension. Southeast Asian Bulletin of Math, 1995, 19 (3)
24 Cheng Fuchang, Xu Jinzhong, Yi zhong. Semi-local rings and modules. in "Pitman Research Notes in Mathematics Series" 204. Harlow: Longman Sei Tech, 1989
25 Cheng Fuchang, Wang Mingyi. Homological dimension of G-Matlis dual modules over semilocal rings. Comm in Algebra, 1993, 21 (4)
26 Cheng Fuchang, Zhao Yicai. On The Structure of Coherent FP-rings. Southeast Asian Bulletin of Math, 1991, 15 (1)
27 Cheng Fuchang, Zhao Yicai, Tang Gaohua. Homological properties of Coherent Semilocal rings. Proc Amer Math Soc, 1990, 110 (1)
28 Dade E C. Group-graded rings and modules. Math Z, 1980, 174
29 Nanqing Ding, Jianlong Chen. The flat dimension of injective modules. Manuscripta Math, 1993, 78
30 Enochs E. Flat covers and flat cotorsion modules. Proc Amer Math Soc, 1984, 92 (2)
31 Faith C. Algebra I, Rings, Modules, and categories. Berlin: springer-Verlag, 1973
32 Faith C. Algebra II, Ring Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

33 Glaz S. Commutative Coherent rings. New York: Springer-Verlag, 1989

34 Goodearl K R, Warfield R B, Jr. An introduction to Non commutative Noetherian rings. Cambridge: Cambribge University Press, 1989

35 Hall M. The Theory of Groups. New York: Macmillan Company, 1959
中译本:(美)赫尔. 群论. 裘光明译. 北京:科学出版社, 1982

36 Huang Zhaoyong, Cheng Fuchang. On homological dimensions of simple modules over non-commutative rings. Comm in Algebra, 1996, 24 (10)

37 Handelman D, Lawrence J, Schelter W. Skew group rings. Houston J Math, 1978, 4

38 Ho Kuen Ng. Finitely presented dimension of commutative rings and modules. Pacific J Math, 1984, 113 (2)

39 Ho Kuen Ng. Coherent rings of dimension two. Proc Amer Math Soc, 1984, 91 (4)

40 Huang Z Y. On the flatness and injectivity of dual modules. southeast Asian Bulletin of Math, 1977, 21

41 Huany Z Y. Homological dimension over coherent semilocal rings Ⅱ, proc of the Fifth Int Conf On Rings and Radicals. Budapest, 1995

42 Ishikawa I. On injective modules and flat modules. J Math Soc Japan, 1995, 17

43 Jacobson N. Basic Algebra I. San Francisco: Freeman Company, 1974

44 Jacobson N. Basic Algebra Ⅱ. San Francisco: Freeman Company, 1980

45 Jans J P. Duality in Noetherian rings. Proc Amer Math Soc, 1961, 12

46 Jans J P. On finitely generated modules over Noetherian rings. Trans Amer Math Soc, 1963, 106 (2)

47 Jain S. Flat and FP-injectivity. Proc Amer Math Soc, 1973, 41 (2)

48 Jones M F. Coherence and torsion theories. Ph. D. Thesis, Kent state University, 1978

49 Jones M F. Flatness and f-projectivity of torsion-free modules and injective modules. Lecture Notes in Mathematics, Belin: Springer-Verlag, 1982

50 Jones M F, Teply M L. Coherent rings of finite weak global dimension. comm in Algebra, 1982, 10 (5)

51 Kaplansky I. Projective modules. Ann. of Math, 1958, 68

52 Kaplansky I. Commutative rings. Boston (reviseed editon): The University

of Chicago Press, 1974

53 Krull W. Dimensions theorie in stellenringen. J Reine Angew Math, 1938, 179

54 Lambek J. A module is flat if and only if its character module is injective. Canada Math Bull, 1964, 7

55 Letzter E S. prime ideals in finite extension of Noetherian rings. J Algebra, 1990, 135

56 Lerenz M, Passman D S. Prime ideals in crossed products of finite groups. Israel J Math, 1979, 33

57 Marubayashi H, Yi Z. Dubrovin valuation properties of skew group rings and crossed products. Comm in Algebra, 1998, 26 (1)

58 Marubayashi H, Miyamato H, Ueda A, Yicai Zhao. Semi-hereditary orders in a simple Artinian ring. Comm in Algebra, 1994, 22 (13)

59 Matsumura H. Commutative Algebra. Redaing: The Benjamin/Cumming Publishing Company, 1981

60 Mcrae D G. Homological dimension of finitely presented modules. Math Scand, 1971, 28

61 Megibben C. Absolutely pure modules. Proc Amer Math Soc, 1970, 26

62 Montgomery S. Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings. Lecture Notes in Math 818. Belin: Springer-Verlag, 1980

63 Morita K. Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect A6, 1958

64 McConnell I C, Robson J C. Non commutative Noetherian rings. New york: Wiley-Interscience, 1987

65 Nastasescu C. Strongly graded rings of finite groups. Comm in Algebra, 1983, 11 (10)

66 Northcott D G. An introduction to homological algebra. Cambridge: Cambridge University press, 1960

67 Northcott D G. A first course of homological algebra. Cambridge: Cambridge University press, 1973

68 Nastasescu C, Oystaeyen F Van. Graded ring theory. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1982

69 Osofsky B. Homological dimensions of modules. Providence: Amer Math Soc, 1971

70 Passman D S. The algebraic structure of group rings. New York: Wiley-Interscience, 1977

71 Passman D S. Infinite crossed products. San Diego: Academic Press, 1989

72 Rainwater J. Global dimension of fully bounded Noetherian rings. comm in Algebra, 1987, 15 (10)

73 Ramamurthi V S. On the injectivity and flatness of certain cyclic modules. proc Amer Math Soc, 1975, 48 (1)

74 Ramamurthi V S. On modules with projective character modules. Math Japan, 1978, 23

75 Rotman J J. An introduction to homological algebra. New York: Academic Press, 1979

76 Rowen L H. Ring theory (Second Edition). San Diego: Academic Press, 1991

77 Sandomierski F L. Homological dimension under Change of rings. Math Z, 1973, 130

78 Serre J P. Cohomologie des groups Discrets, Prospects in Mathematics. Annals of Math studies, 1971, 70

79 Small L W. A change of rings theorem. Proc Amer Math Soc, 1968, 19

80 Snider R L. Noncommutative regular local rings of dimension 3. Proc Amer Math Soc, 1988, 104 (1)

81 Stenström B. Coherent rings and FP-injective modules. J London Math Soc, 1970, 2

82 Samuel, Young S H. On the sum of homological dimension and codimension of modules over a semi-local ring. Nagoya Math J, 1968, 33

83 Vasconcelos W V. On projective modules of finite rank. Proc Amer Math Soc, 1969, 22

84 Vasconcelos W V. The local ring of global dimension two. Proc Amer Math Soc, 1972, 35

85 Vasconcelos W V. The rings of dimension two. New York: Marcel Dekker, 1976

86 Mingyi Wang. Some studies on Π-Coherent rings. Proc Amer Math Soc. 1993, 119 (1)

87 Xu Jinzhong. Flatness and injectivity of simple modules over a Commutative ring. Comm in Algebra, 1991, 19 (2)

88 Xu Jinzhong. Flat covers of modules. Lecture Notes in Math 1634. Berlin: Spring-Verlag, 1996

89 Weimin Xue, Rings with Morita duality, Lecture Notes in Math 1953. Berlin: Spring-Verlag, 1992

90 Jinzhong Xu, Fuchang Cheng. Homological dimensions over Non-commutative Semi-local rings. J Algebra, 1994, 169 (3)

91 Yi Zhong, Cheng Fuchang. Socle of Crossed products. Comm in Algebra, 1996, 24 (3)

92 Yi Zhong. Homological properties of Noetherian rings and Noetherian ring extensions. ph. D Thesis. University of Glasgow, 1993

93 Yi Zhong. Homological dimension of skew group rings and crossed products. J Algebra, 1994, 44 (1)

94 Yi Zhong. Injective Homogeneity and the Auslander-Gorenstein property. Glasgow Math J, 1995, 37

95 Yi Zhong. Notes on homological dimension of group graded rings. Proc of the second Japan-China International Symposium on Ring theory and the 28th Symposium on Ring theory. Okayama, Japan, 1996

96 Yi Zhong. Injective homogeneity and homological homogeneity of the ore extensions. Acta Math Sinca, 1997, 13 (4)

97 Zhao Yicai. A note on coherent rings of dimension two. Proc Amer Math Soc, 1992, 115 (4)

98 Zhao Yicai. A test on Coherent GCD domains. Proc Amer Math Soc, 1992, 115 (1)

99 Zhao Yicai. On commutative indecomposable coherent regular rings. Comm in Algebra, 1992, 20 (5)

100 Zhou Boxun, Tong Wenting. On homological dimensions over Coherent rings, Proc. of the First China-Japan International symposium on Ring Theory. Okayama, 1992

101 周伯埙. 同调代数. 北京: 科学出版社, 1988

102 谢邦杰. 抽象代数. 上海: 上海科学技术出版社, 1982

103 刘绍学. 环与代数. 北京: 科学出版社, 1983

104 陈家鼐. 环与模. 北京: 北京师范学院出版社, 1989

105 程福长. 同调代数. 桂林: 广西师范大学出版社, 1989

106　周伯埙．左模张量积及其投射维数．数学研究与评论，1981，4
107　佟文廷．几种同调维数与半遗传环．南京大学学报数学半年刊，1988，1
108　姚栋园．完全环的同调维数．南京大学学报数学半年刊，1986，1
109　丁南庆．凝聚环中的对偶性．南京大学学报数学半年刊．1990，1
110　丁南庆．特殊模的对偶模．数学研究与评论，1990，10（3）
111　丁南庆．f. f. p. 维数．数学学报，1991，34（1）
112　丁南庆．GQF-环．数学年刊，1992，13A（2）
113　王芳贵．凝聚环上模的FP-内射维数．南京大学学报数学半年刊，1998，1
114　王芳贵．同态模 Hom(A,B)的同调维数．数学研究与评论，1989，9（3）
115　李元林．有限表现维数的换环定理．南京大学学报数学半年刊，1990，1
116　李元林．有限表现维数与凝聚环．数学杂志，1993，13（2）
117　章聚乐，杜先能．Von Neumann 正则环和 SF-环．数学年刊，1993，14A（1）
118　徐金中，易忠．关于同调维数若干命题的讨论．数学研究与评论，1985，4
119　徐金中．半局部环上的模及其同调维数．数学年刊，1986，7A（6）
120　赵逸才．弱半局部环的同调性质．数学研究与评论，1993，13（1）
121　赵逸才．右有限连通的正则半局部环．数学杂志，1993，3
122　程福长，赵逸才．凝聚 FP-环的结构．数学年刊，1991，12A（2）
123　程福长．Λ-模的 σ-子模的标准表示式．数学研究与评论，1983，3（4）
124　易忠．关于拟投射模和拟内射模．数学杂志，1987，7：59～62
125　易忠．在中心上整的内射齐次 Noether 环．数学年刊，1997，18A（4）
126　姚慕生．关于单模的同调维数．科学通报，1993，38（3）
127　王明生．有一个直因子是单模的有限生成模的同调维数．科学通报，1993，38（21）
128　黄兆泳．非交换凝聚环上的 FP-自内射维数．数学学报，1997，40（2）
129　汪明义、于增海．模的嵌入问题．数学年刊，1997，18A（1）
130　唐高华．凝聚半局部代数．数学研究与评论，1992，12（4）

[General Information]
书名=环的同调维数
作者=程福长　易忠著
页数=302
SS号=10307475
DX号=
出版日期=2000年10月第1版
出版社=广西师范大学出版社